Jihomoravské centrum pro mezinárodní mobilitu, z.s.p.o.
Česká 166/11 | Brno 602 00 | 541 211 043

Využití GeoGebry ve výuce matematiky

Pracovní listy pro workshop matematické čtenářské gramotnosti o využití matematického softwaru při výuce funkcí a geometrie na střední škole

Petra Bidmanová Strnadová
Lenka Pavlíčková

Aktivita je realizována a financována v rámci projektu „PolyGram - Podpora polytechnického vzdělávání, matematické a čtenářské gramotnosti v Jihomoravském kraji“, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_034/0008358, v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání. Na projekt je poskytována finanční podpora EU, MŠMT a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Badatelsky orientované vyučování a GeoGebra

Badatelsky orientované vyučování (učení) je inovativní vyučovací metoda, která se stala symbolem změn ve výuce přírodovědných předmětů v posledních několika desítkách let. Podstatou této metody je zapojení žáků a studentů do objevování přírodovědných zákonitostí, propojování informací do smysluplného kontextu, rozvíjení kritického myšlení a podpora pozitivního postoje k přírodním vědám. Důraz je kladen na výuku jako bádání (inquiry), ne jako memorování faktů. Tuto metodu můžeme aplikovat i v matematice. V literatuře se často setkáváme se spojením badatelsky orientovaného vyučování se softwarem GeoGebra a to zejména proto, že velkým kladem GeoGebry je její dynamičnost. S používáním softwarů tohoto typu se rozšířil do světa výuky matematiky nový pojem, tzv. dynamická geometrie, příp. dynamická matematika. Dynamická geometrie přináší do roviny „třetí rozměr“ – pohyb. Využití pohybu je tím, co nám v prostředí dynamické geometrie umožňuje bádat a objevovat zcela novým způsobem. Díky GeoGebře mohou studenti velice snadno manipulovat s objekty, přičemž jsou však zachovány všechny jejich požadované vlastnosti, mohou hledat a nacházet invarianty a sledovat závislosti mezi jednotlivými objekty. V krátkém čase mohou prozkoumat velké množství situací a mohou tak vytvářet vlastní hypotézy.

Rozlišujeme 4 základní typy badatelsky orientovaného vyučování:

1. úroveň – potvrzující bádání

Při potvrzujícím bádání je cílem ověřit předložená fakta. Cíl bádání i způsob řešení při tom předkládá studentům vyučující.
Příklad: Studenti mají za úkol ověřit, že těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

2. úroveň – strukturované bádání

Při strukturovaném bádání učitel předkládá otázku i možný postup a úkolem studentů je nalézt odpovídající řešení a zdůvodnění.
Příklad: Studenti mají nalézt dělicí poměr těžnic.

3. úroveň – nasměrované bádání

Při nasměrovaném bádání učitel pouze uvádí problém – výzkumnou otázku – a studenti si volí způsob řešení a realizují řešení nezávisle. Přesto, že je způsob řešení ponechán ne rozhodnutí studentům, může učitel vytvořením vhodného prostředí studenty k určitému typu řešení nasměrovat. Pokud je například úloha položena při práci v počítačové učebně a studenti již mají zkušenost s prací v programu GeoGebra, je přirozené, že pro řešení zvolí tento nástroj.
Příklad: Studenti mají najít co nejvíce vlastností trojúhelníku a jeho těžnic.

4. úroveň – otevřené bádání

Při otevřeném bádání si studenti sami sestavují otázku, navrhují postup řešení i jej realizují a formulují výsledky bádání. Z pohledu využití ve výuce je otevřené bádání nejpřínosnější, ale také nejobtížnější, co se týká plánování výuky. Při využití otevřeného bádání jsou možnosti učitele řídit průběh hodiny jen velice omezené. Pokud chce učitel použít otevřené bádání na podporu konkrétního učebního obsahu, má v zásadě dvě možnosti, jak činnost studentů usměrnit. Může buď připravit situaci ve třídě tak, aby si studenti vhodnou otázku položili, nebo přesně vymezit oblast, v jejímž rámci mají studenti bádat.

Úroveň bádání (IBSE)	Otázky (stanovené učitelem)	Postup (stanovený učitelem)	Řešení (stanovené učitelem)
1. Potvrzující (confirmation)	ano	ano	ano
2. Strukturované (structured)	ano	ano	ne
3. Nasměrované (guided)	ano	ne	ne
4. Otevřené (open)	ne	ne	ne

<u>**Další výhody používání GeoGebry v matematice:**</u>

- **Studenti poznávají potřebu přesných konstrukcí**
  například: konstrukce kružnice vepsané trojúhelníku ABC
- **Žáci se mohou setkat s překvapivými modely**
  například: Každý trojúhelník lze rozdělit jedním řezem na dva trojúhelníky. Rozhodněte, zda totéž platí i pro čtyřúhelníky; tedy, zda lze každý čtyřúhelník jedním řezem rozdělit na dva čtyřúhelníky.
- **Možnost propojit prostředí GeoGebry s papírem** a využít funkci záznam pohybu (stopy) objektu.
  1: Narýsujte na papír bod a přímku. Přeložte papír co nejvíce způsoby tak, aby po přeložení ležel bod na přímce. Rozhodněte, jaký objekt jste tímto způsobem obdrželi a proč.
  2: Narýsujte na papír kružnici a bod mimo tuto kružnici. Přeložte papír co nejvíce způsoby tak, aby po přeložení ležel bod na kružnici. Rozhodněte, jaký objekt jste tímto způsobem obdrželi a proč.
  3: Narýsujte na papír kružnici a bod uvnitř této kružnice. Přeložte papír co nejvíce způsoby tak, aby po přeložení ležel bod na kružnici. Rozhodněte, jaký objekt jste tímto způsobem získali a proč. (2)
- **Spojit prostředí GeoGebry s reálným prostředím.** Lze totiž zkoumat geometrické vlastnosti objektů, které nás obklopují a to tím, že vložíme reálný obrázek do nákresny a studenti tak mohou například vyšetřovat tvar křivky, kterou zaujímají řetězy visící kolem kašny na náměstí. (1)

Literatura

1. Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií. Pavel pech a kol. České Budějovice 2015
2. Dynamická matematika. Příručka k projektu OPPA. Antonín Jančařík. UK v Praze. Praha 2014
3. Moduly s experimenty v badatelsky orientovaném přírodovědném vzdělávání. Josef Trna, Eva Trnová. 1. vyd. Brno: Paido, Masarykova univerzita, 2015

TEČNOVÝ A TĚTIVOVÝ ČTYŘÚHELNÍK

Užitím GeoGebry zkoumejte některé vlastnosti těchto čtyřúhelníků.

1. Čtyřúhelník nazýváme tětivový, jestliže mu lze opsat kružnici.

V GeoGebře sestrojte tětivový čtyřúhelník a zkoumejte jeho vlastnosti.

Součet protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je ______________________________

Osy stran tětivového čtyřúhelníku ____

Vyberte, které rovinné útvary můžeme označit za tětivové čtyřúhelníky:

a) čtverec

b) obdélník

c) pravoúhlý lichoběžník

d) rovnoramenný lichoběžník

e) obecný lichoběžník

f) deltoid

Svou odpověď zdůvodněte.

____

____

Vaše objevy:

____

____

____

____

2. Čtyřúhelník nazýváme tečnový, jestliže mu lze vepsat kružnici.

V GeoGebře sestrojte tečnový čtyřúhelník a zkoumejte jeho vlastnosti.

Součty délek dvojic protějších stran tečnového čtyřúhelníku jsou________________________

Vyberte, které rovinné útvary můžeme označit za tečnové čtyřúhelníky:

a) čtverec

b) obdélník

c) pravoúhlý lichoběžník

d) rovnoramenný lichoběžník

e) obecný lichoběžník

f) deltoid

Svou odpověď zdůvodněte.

____

____

Vaše objevy:

____

____

____

____

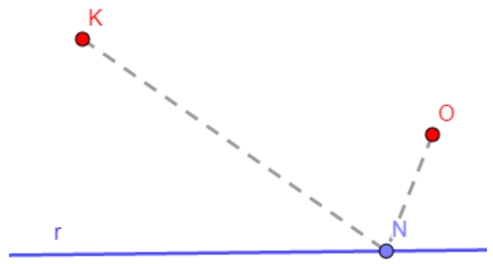
Existuje čtyřúhelník, který bychom mohli označit za tečnový a zároveň tětivový?
Nejdříve ho zkuste sestrojit v GeoGebře a následně sem.

Pracovní list pro pedagogy

Osová souměrnost– příprava na hodinu

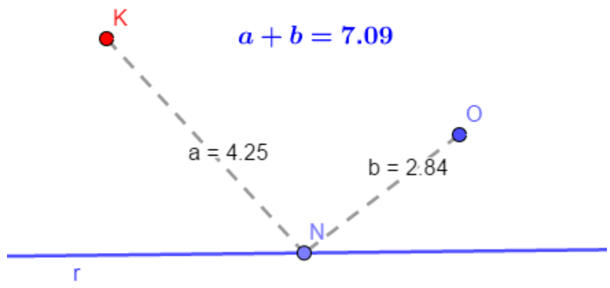
Úloha

Kovboj hlídá stádo koní (K). Navečer je má zahnat do ohrady (O), ale ještě před tím je má napojit u řeky (přímka *r*). Najděte optimální polohu napajedla (bod N leží na přímce *r*) tak, aby celková délka cesty z K k řece a do ohrady (O) byla minimální. (Body K, O leží na stejné straně řeky).

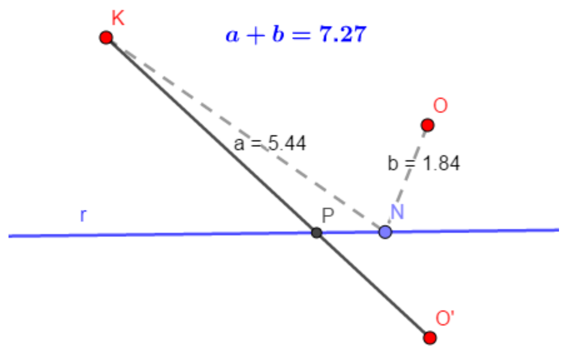


---

1. ***Motivační příklad před kapitolou o osové souměrnosti***



2. ***Příklad řešíme po probrání osové souměrnosti***

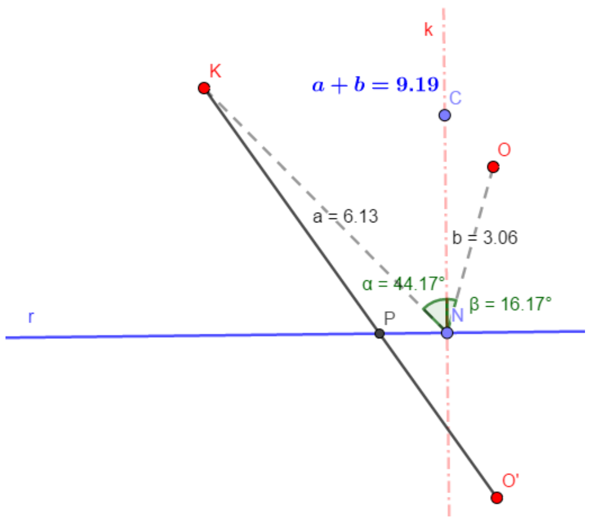


Něco navíc:

Lze spojit s fyzikou

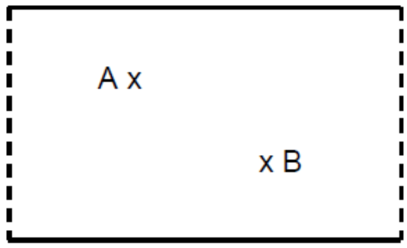
Do řešení úlohy lze vnést fyzikální hledisko – zákon odrazu světla.

Sestrojíme v bodě N kolmici na přímku r a znázorníme úhel dopadu α a úhel odrazu β. Tyto úhly se budou rovnat jedině v případě kdy N=P.



Podobné příklady z jiného prostředí:

Herec na jevišti v místě A má doběhnout na okraj obdélníkového jeviště, přeběhnout na jeho druhý okraj a skončit v místě B. Určete jeho nejkratší dráhu.



Úkol - kulečník

Pomocí GeoGebry vymodelujte kulečníkový stůl (Karambol 180 *cm* x 90 *cm*). Na stůl umístěte červenou a modrou kouli (průměr koulí 61,5 *mm*). Znázorněte trajektorii červené koule tak, aby zasáhla modrou kouli s odrazem od jedné, dvou nebo tří stěn v daném pořadí (horní – pravá – dolní). Existuje případ, kdy taková trajektorie neexistuje?

Poznámka: Po vymodelování v GeoGebře můžeme žákům, například pomocí nějaké krabice, vytvořit přímo model kulečníkového stolu.

Literatura

http://archiv.gymkrom.cz/web/ict/materialy/Dvacitka_GGB.pdf a Exkurze do Mahenova divadla Brno www.polygram.cz

http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/cabri/main.php?Kapitola=zobrazeni-osova_soumernost&fbclid=IwAR2-b8XDJUcBcsYvTD1zQR9Ce4vz6OaXbGElYOZPNiyj6CQWfa7aMT4NZEU

MOCNINNÁ FUNKCE

Pomocí GeoGebry zkoumejte, jak vypadají grafy mocninných funkcí.

1. Do jedné nákresny sestrojte grafy funkcí: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^8$, $y = x^{70}$.

a) vypište, jakými body grafy všech funkcí prochází

____

b) napište, jaký tvar má graf funkce

____

c) určete, co mají předpisy funkcí společné

____

2. Do jedné nákresny sestrojte grafy funkcí: $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^{81}$.

a) vypište, jakými body grafy všech funkcí prochází

____

b) napište, jaký tvar má graf funkce

____

c) určete, co mají předpisy funkcí společné

____

3. Do jedné nákresny sestrojte grafy funkcí: $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$, $y = x^{-8}$, $y = x^{-70}$.

a) vypište, jakými body grafy všech funkcí prochází

____

b) napište, jaký tvar má graf funkce

____

c) určete, co mají předpisy funkcí společné

____

4. Do jedné nákresny sestrojte grafy funkcí: $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, $y = x^{-7}$, $y = x^{-81}$.

a) vypište, jakými body grafy všech funkcí prochází

____

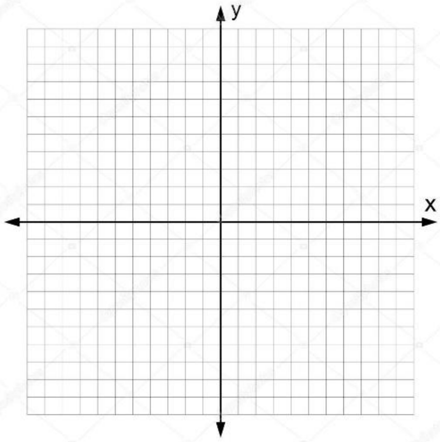
b) napište, jaký tvar má graf funkce

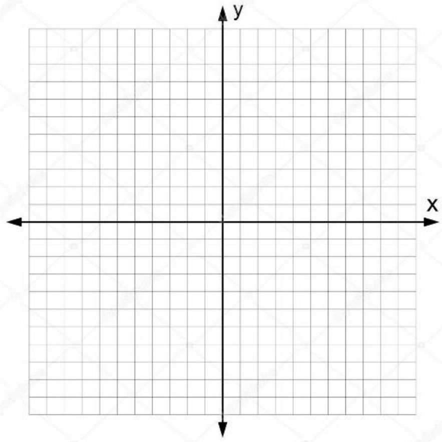
____

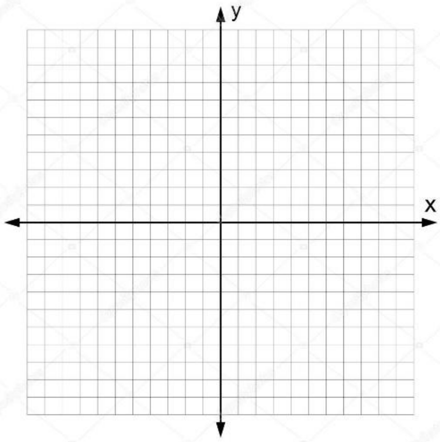
c) určete, co mají předpisy funkcí společné

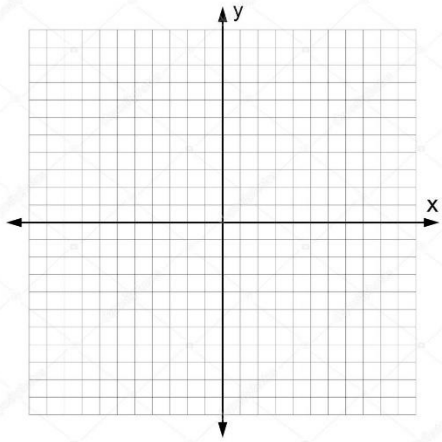
____

Informace ze zkoumání zobecněte a doplňte tabulku:

<table>
<tr><th colspan="3">Funkce s předpisem $y = x^n$; $n \in Z - \{0;1\}$</th></tr>
<tr><td>n</td><td>liché</td><td>sudé</td></tr>
<tr><td>k
l
a
d
n
é</td><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>z
á
p
o
r
n
é</td><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>