Vybrané typy nerovnic s jednou neznámou

Mgr. Aleš Kobza, Ph. D.

Text představuje podporu k výuce celku „Rovnice a nerovnice“ na SŠ, jeho využití je předpokládáno zejména na gymnáziích. Tento materiál se zaměřuje na části „Nerovnice v podílovém tvaru“, „Kvadratické nerovnice“, „Nerovnice s neznámou pod odmocninou“ a „Nerovnice s parametry“.

V úvodní – jednodušší – části nabízí sadu úloh (řazených s rostoucí obtížností) k procvičení tohoto učiva. Ve druhé části text začíná poměrně podrobnou teoretickou průpravou. V dalších dvou částech je pak nastíněný postup řešení ilustrován řadou řešených příkladů. Závěrečná pasáž každé části je věnována úlohám, k nimž jsou vždy připojeny výsledky a leckdy i návody k řešení, které jsou podrobnější zejména u obtížnějších úloh.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Vybrané typy nerovnic s jednou neznámou

Nerovnice (a rovnice) v podílovém tvaru

Důležitá upozornění.

- Nezapomínejte na podmínky, které zajistí, aby žádný jmenovatel nemohl nabývat hodnoty 0.
- Dávejte pozor, abyste nerovnici nenásobili výrazem s neznámou, který může být pro nějaké hodnoty této neznámé kladný a pro jiné záporný.
- Všímejte si, zda je některý činitel kladný či nezáporný pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Výrazem, který je nezáporný, ale nemusí být kladný, nelze nerovnici (ani rovnici) dělit!
- V podílovém tvaru je potřebné najít a uvážit všechny nulové body příslušného výrazu. Studovanou nerovnici pak vyřešíme pomocí číselné osy a tabulky znamének.
- Základní myšlenka řešení je stejná jako v případě řešení rovnic či nerovnic v součinovém tvaru, kterými jsme se zabývali v předchozí kapitole.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice či nerovnice

a)

$$\frac{2x-3}{7-3x} > 0\,, \qquad \frac{4x-5}{3-2x} \le 0\,, \qquad \frac{3x-1}{x+4} < 0\,, \qquad \frac{3-2x}{4x-1} \ge 0\,, \qquad \frac{(4-x)(6+x)\,x}{7-x} \le 0\,,$$

b)

$$\frac{2-x}{x+5} \ge 1\,, \qquad \frac{x-7}{x-1} \le 9\,, \qquad \frac{2x+3}{3-x} \le 2\,, \qquad \frac{2x-1}{2x+1} \le 1\,, \qquad \frac{5x-6}{x+6} \le 1\,, \qquad \frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}\,,$$

c)

$$\frac{x^3+8}{x^2+6x+8} = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{x^3+8}{x^2+6x+8} > 0\,,$$

d)

$$\frac{x^2+8x+15}{x^2-9} = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{x^2+8x+15}{x^2-9} \le 0\,,$$

e)

$$\frac{4+x}{\left(3-\frac{x}{2}\right)^3(7-2x)^5} \ge 0\,, \quad \frac{(x-1)^2}{(x+3)(x-2)} \ge 0\,, \quad \frac{(x+2)^3(3-x)\,x^2}{x+1} \le 0\,, \quad \frac{(2x-3)(x+3)^4}{(2-x)^2} \ge 0\,,$$

f)

$$\frac{x^4-16}{(x^3+27)(x-3)^2} \ge 0\,, \qquad \frac{(3x+1)^3(x^2-9x+18)}{x^2(1-x^2)(1+x)^4} \le 0\,,$$

g)

$$\frac{13x+16}{x^2-3x-10} < -2\,, \qquad \frac{x^3-x^2+x+5}{3-x} \le 3\,,$$

h)

$$\frac{\sqrt{x^2-8x+12}}{(x-2)^3} \le 0\,, \qquad \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{x^2-11x+24} > 0\,.$$

2. Určete definiční obory následujících výrazů

$$V_1 = \sqrt{\frac{3-4x}{3x-4} - 2}\,, \qquad V_2 = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1} - 1} \qquad \text{a určete, kdy } V_1 \le 0\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) Zkoumáme zvlášť znaménko čitatele a jmenovatele, pomocí čehož určíme znaménko příslušného podílu. Po řadě vychází $K = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$, $K = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right\rangle \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$, $K = \left(-4; \frac{1}{3}\right)$, $K = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right\rangle$, $K = \langle -6; 0\rangle \cup \langle 4; 7)$.

   b) Nerovnice je výhodné anulovat, tzn. přičíst k oběma jejím stranám číslo opačné k číslu na pravé straně. Dostaneme tak nerovnice ekvivalentní se zadanými po řadě

$$\frac{2x+3}{x+5} \le 0\,, \quad \frac{4x-1}{x-1} \ge 0\,, \quad \frac{4x-3}{3-x} \le 0\,, \quad \frac{2}{2x+1} \ge 0\,, \quad \frac{4x-12}{x+6} \le 0\,, \quad \frac{x+5}{2x-10} > 0\,,$$

   které dále vyřešíme jako v první úloze. Po řadě vychází $K = \left(-5; -\frac{3}{2}\right\rangle$, $K = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right\rangle \cup (1; \infty)$, $K = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right\rangle \cup (3; \infty)$, $K = \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$, $K = (-6; 3\rangle$, $K = (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$.

   c) Upravme nejprve výraz na levých stranách

$$\frac{x^3+8}{x^2+6x+8} = \frac{(x+2)\,(x^2-2x+4)}{(x+2)\,(x+4)}\,.$$

   Neboť $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$, je čitatel nulový právě tehdy, když $x = -2$. Tato hodnota ovšem s ohledem na tvar jmenovatele není přípustná. Zadaná rovnice tedy nemá řešení, $K = \emptyset$. Za podmínky $x \ne -2$ je proto zadaná nerovnice ekvivalentní s nerovnicí

$$\frac{1}{x+4} > 0\,,$$

   takže platí $K = (-4; -2) \cup (-2; \infty)$.

   d) Zjednodušením levých stran dostaneme

$$\frac{x^2+8x+15}{x^2-9} = \frac{(x+3)\,(x+5)}{(x-3)\,(x+3)} = \frac{x+5}{x-3}\,,$$

   přičemž tento výraz je definován právě pro všechna $x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}$. Uvažovaná rovnice tedy má právě jedno řešení, $K = \{-5\}$, pro množinu všech kořenů řešené nerovnice pak platí $K = \langle -5; -3) \cup (-3; 3)$.

   e) U nerovnic uvedených v tomto oddíle je třeba vzít v potaz exponenty. Rozmyslete si, že záleží na jejich paritě. Výraz umocněný na sudý exponent nemůže bý záporný (ale nulový ano), zatímco výraz umocněný na lichý exponent nabývá ve všech intervalech stejného znaménka jako jeho první mocnina (viz úvahy v předchozích úlohách). Po řadě vychází $K = \left\langle -4; \frac{7}{2}\right) \cup (6; \infty)$, $K = (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (2; \infty)$, $K = \langle -2; -1) \cup \{0\} \cup \langle 3; \infty)$, $K = \{-3\} \cup \left\langle \frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; \infty)$.

   f) V obou nerovnicích z tohoto oddílu je potřeba nejprve ještě některé výrazy rozkládat na součiny již dále nerozložitelných činitelů. Platí

$$\frac{x^4-16}{(x^3+27)\,(x-3)^2} = \frac{(x^2+4)\,(x-2)\,(x+2)}{(x+3)\,(x^2-3x+9)\,(x-3)^2}\,,$$

přičemž $x^2+4>0$ a $x^2-3x+9>0$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, takže

$$\frac{x^4-16}{(x^3+27)(x-3)^2}\geq 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-3)^2}\geq 0\,,\quad K=(-3;-2\rangle\cup\langle 2;3)\cup(3;\infty)\,.$$

Podobně pomocí úpravy

$$\frac{(3x+1)^3(x^2-9x+18)}{x^2(1-x^2)(1+x)^4}=\frac{(3x+1)^3(x-3)(x-6)}{x^2(1-x)(1+x)^5}$$

pro druhou nerovnici zjistíme, že $K=\left(-1;-\frac{1}{3}\right\rangle\cup(1;3\rangle\cup\langle 6;\infty)$.

g) Nerovnice je výhodné nejprve anulovat (viz postup v části 2.) a následně některé výrazy rozkládat na součiny již dále nerozložitelných činitelů (viz postup v části 6.). Vypočteme tak

$$\frac{13x+16}{x^2-3x-10}<-2 \quad\Leftrightarrow\ \dots\ \Leftrightarrow\quad \frac{2x^2+7x-4}{x^2-3x-10}<0 \quad\Leftrightarrow\ \dots\ \Leftrightarrow\quad \frac{(2x-1)(x+4)}{(x-5)(x+2)}<0\,,$$

odkud $K=(-4;-2)\cup\left(\frac{1}{2};5\right)$. Podobně v případě druhé nerovnice dostaneme

$$\frac{x^3-x^2+x+5}{3-x}\leq 3 \quad\Leftrightarrow\ \dots\ \Leftrightarrow\quad \frac{x^3-x^2+4x-4}{3-x}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\ \dots\ \Leftrightarrow\quad \frac{(x^2+4)(x-1)}{3-x}\leq 0\,.$$

Když si uvědomíme, že pro všechna $x\in\mathbb{R}$ platí $x^2+4>0$, můžeme v ekvivalentních úpravách dále pokračovat

$$\frac{(x^2+4)(x-1)}{3-x}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-1}{3-x}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-1}{x-3}\geq 0\,,\quad \text{takže}\quad K=(-\infty;1\rangle\cup(3;\infty)\,.$$

h) Aby byl výraz $\sqrt{x^2-8x+12}$ definován, je nutné a stačí, aby $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)\geq 0$. Dále ještě potřebujeme, aby ve jmenovateli zlomku nebyla nula. To nastane tehdy a jen tehdy, když $x\neq 2$. Definičním oborem zadané nerovnice je tedy množina $D=(-\infty;2)\cup\langle 6;\infty)$. Dále je z dosud uvedeného vidět, že zlomek na levé straně nerovnice je nulový právě, tehdy, když $x=6$, takže $6\in K$. Další kořeny hledejme za podmínky, kdy $x\neq 6$. Pro všechna $x\in D-\{6\}=(-\infty;2)\cup(6;\infty)$ tedy platí

$$\frac{\sqrt{x^2-8x+12}}{(x-2)^3}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{(x-2)^3}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{(x-2)}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x-2<0 \quad\Leftrightarrow\quad x<2\,.$$

Dohromady tak máme $K=(-\infty;2)\cup\{6\}$.
Pro druhou nerovnici pak platí

$$\frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{x^2-11x+24}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{(x-3)(x-8)}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|2x+1|}{(x-3)(x-8)}>0\,.$$

Odtud je vidět, že definičním oborem nerovnice je množina $D=\mathbb{R}-\{3;8\}$ a dále, že zlomek na levé straně nerovnice je nulový právě tehdy, když $x=-\frac{1}{2}$. Proto $-\frac{1}{2}\notin K$. Pro všechna $x\in D-\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3;8\right\}$ platí

$$\frac{1}{(x-3)(x-8)}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{(x-3)(x-8)}>0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)(x-8)>0\,.$$

Vychází tak $K=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};3\right)\cup(8;\infty)$.

2. Výrazy pod jednotlivými odmocninami musí být nezáporné, což vede po řadě na nerovnice

$$\frac{3-4x}{3x-4}-2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{11-10x}{3x-4}\geq 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{2x-1}{x+1}-1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-2}{x+1}\geq 0\,.$$

Platí $D_{v_1}=\left\langle\frac{11}{10};\frac{4}{3}\right)$ a $D_{v_2}=(-\infty;-1)\cup\langle 2;\infty)$. Vzhledem k tomu, že každá odmocnina nabývá jedině nezáporných hodnot, je nerovnice $V_1\leq 0$ ekvivalentní s podmínkou $V_1=0$, která je splněna právě tehdy, když $x=\frac{11}{10}$.

Kvadratické nerovnice

Definice. Kvadratickou nerovnicí rozumíme nerovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c \, \mu \, 0\,, \quad \text{kde } \mu \in \{<; >; \leq; \geq\}\,,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Čísla a, b , c nazýváme koeficienty kvadratické nerovnice, výrazy ax^2, bx a c nazýváme členy této nerovnice, a to po řadě kvadratický, lineární a absolutní.

Řešení kvadratické nerovnice. Vhodné je nejprve vyřešit příslušnou kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c = 0$, kde $D = b^2 - 4ac$ značí její diskriminant. Podle jeho znaménka nastávají 3 případy:

1. Jestliže $D < 0$, rovnice v $\mathbb{R}$ nemá žádné řešení. Výraz $ax^2 + bx + c$ tedy nemá žádný nulový bod. Znamená to, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je buď kladný, nebo záporný, tj.

   $$ax^2 + bx + c > 0\,, \text{ nebo } ax^2 + bx + c < 0\,.$$

   To, která z variant nastává, poznáme podle znaménka koeficientu a. Platí

   $$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c > 0 \qquad \big(\text{a podobně } a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c < 0\big)\,.$$

   U následujících příkladů si sami ověřte, že všechny rovnice příslušné uvažovaným nerovnicím mají záporné diskriminanty:

   a) Nerovnice
   $$3x^2 + 4x + 2 \geq 0$$
   má množinu kořenů $K = \mathbb{R}$, neboť $a = 3 > 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $3x^2 + 4x + 2 > 0$.

   b) Nerovnice
   $$2x^2 - 5x + 6 \leq 0$$
   má množinu kořenů $K = \emptyset$, neboť $a = 2 > 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $2x^2 - 5x + 6 > 0$.

   c) Nerovnice
   $$-4x^2 + 6x - 3 > 0$$
   má množinu kořenů $K = \emptyset$, neboť $a = -4 < 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-4x^2+6x-3 < 0$.

   d) Nerovnice
   $$-5x^2 + 8x - 4 < 0 \quad \text{i} \quad -5x^2 + 8x - 4 \leq 0$$
   mají množinu kořenů $K = \mathbb{R}$, neboť $a = -5 < 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-5x^2+8x-4 < 0$.

2. Pokud $D = 0$, rovnice tedy má 1 (tzv. dvojnásobný) kořen $x_1 = x_2$. Výraz $ax^2 + bx + c$ tedy má právě jeden nulový bod x_1. Znamená to, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_1$ je buď kladný, nebo záporný, tj.

   $$ax^2 + bx + c > 0\,, \text{ nebo } ax^2 + bx + c < 0\,.$$

   To, která z variant nastává, opět poznáme podle znaménka koeficientu a. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_1$ tedy platí

   $$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c > 0 \qquad \big(\text{a podobně } a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c < 0\big)\,.$$

   U následujících příkladů si sami rozmyslete, že všechny rovnice příslušné uvažovaným nerovnicím mají diskriminanty rovné nule:

   a) Nerovnice
   $$x^2 + 4x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)^2 \geq 0$$
   má množinu kořenů $K = \mathbb{R}$, neboť jakýkoliv kvadrát je nezáporný.

b) Nerovnice

$$2x^2 - 12x + 18 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x-3)^2 > 0$$

má množinu kořenů $K = \mathbb{R} - \{3\}$, neboť výraz $(x-3)^2$ je nulový právě tehdy, když $x = 3$ a ve všech ostatních případech je kladný.

c) Nerovnice

$$-3x^2 + 6x - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\,(x-1)^2 \geq 0$$

má množinu kořenů $K = \{1\}$, neboť výraz $-3\,(x-1)^2$ je nulový právě tehdy, když $x = 1$ a ve všech ostatních případech je záporný.

d) Nerovnice

$$-4x^2 + 16x - 16 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4\,(x-2)^2 > 0$$

má množinu kořenů $K = \emptyset$, neboť výraz $-4\,(x-2)^2$ je nekladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

3. Pro $D > 0$ má uvažovaná rovnice dva reálné různé kořeny x_1 a x_2, které umíme najít užitím známých vzorců

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,, \quad \text{kde } D = b^2 - 4ac\,.$$

Můžeme tedy psát

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = ax^2 + bx + c\,,$$

čímž zadanou nerovnici převedeme do součinového tvaru a vyřešíme ji například analýzou znamének jednotlivých činitelů.
Právě popsaným způsobem lze u následujících příkladů získat uvedené rozklady do součinového tvaru:

a) Nerovnice

$$-3x^2 + 10x + 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-4) \geq 0$$

má množinu kořenů $K = \left\langle -\frac{2}{3}; 4 \right\rangle$.

b) Nerovnice

$$6x^2 + 13x - 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0$$

má množinu kořenů $K = \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

c) Nerovnice

$$-4x^2 + 5x + 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4\left(x + \frac{3}{4}\right)(x-2) \leq 0$$

má množinu kořenů $K = \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right\rangle \cup \langle 2; \infty)$.

d) Nerovnice

$$\sqrt{3}x^2 + 9x + \sqrt{108} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x + 2\sqrt{3}\right) > 0$$

má množinu kořenů $K = \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \infty\right)$.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

   a)
$$2x^2 - 12x + 19 > 0\,,$$

   b)
$$2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 \leq 0\,,$$

   c)
$$2x\,(x-2) + (2-x)\,(x+3) < 0\,,$$

   d)
$$2x^2 + 8x + 1 \geq 0\,.$$

2. Určete definiční obory následujících výrazů

   a)
$$V_1 = \sqrt{x^2 - 6} + \sqrt{3x + 10 - x^2}\,,$$

   b)
$$V_2 = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{3 - x}\,,$$

   c)
$$V_3 = \sqrt{x^2 + 5x + 7} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}\,,$$

   d)
$$V_4 = \sqrt{\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 - 6x - 40}} \quad \text{a} \quad V_5 = \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 12}}{\sqrt{x^2 - 6x - 40}}\,.$$

3. Určete definiční obory následujících výrazů a poté je zjednodušte

   a)
$$V_6 = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{5x - 4 - x^2}}\,,$$

   b)
$$V_7 = \frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{\sqrt{6 + 5x + x^2}}$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) $K = \mathbb{R}$,

   b) $K = \left\{ \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}$,

   c) $K = (2; 3)$,

   d) $K = \left(-\infty; -\frac{4+\sqrt{14}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-4+\sqrt{14}}{2}; \infty \right)$.

2. a) Musí současně platit $x^2 - 6 \geq 0$ a $3x + 10 - x^2 \geq 0$; vyřešením této soustavy vychází $D(V_1) = \left\langle \sqrt{6}; 5 \right\rangle$,

   b) $D(V_2) = (-\infty; 2\rangle$,

   c) $D(V_3) = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$,

   d) Aby byl definován výraz V_4 je nutné a stačí, aby

$$\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 - 6x - 40} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x+6)}{(x-10)(x+4)} \geq 0\,.$$

   Řešením této nerovnice dostáváme $D(V_4) = (-\infty; -6\rangle \cup (-4; -2\rangle \cup (10; \infty)$. Zato nutnou a dostatečnou podmínkou k tomu, aby byl definován výraz V_5, je

$$x^2 + 8x + 12 \geq 0 \quad \text{a současně} \quad x^2 - 6x - 40 > 0\,.$$

   Vyřešením této soustavy nerovnic obdržíme $D(V_5) = (-\infty; -6\rangle \cup (10; \infty)$. Vidíme, že $D(V_4) \supset D(V_5)$. Dále víme, že pro všechna $x \in D(V_5)$ platí $V_4 = V_5$. Nelze však tvrdit, že tato rovnost platí pro všechna $x \in D(V_4)$!

3. a) $D(V_6) = (1; 4)$. Pro všechna $x \in D(V_6)$ platí

$$V_6 = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{4-x}} = \sqrt{\frac{x+3}{4-x}}\,.$$

   b) $D(V_7) = (-2; 2\rangle$. Pro všechna $x \in D(V_7)$ platí

$$V_7 = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,.$$

Nerovnice s neznámou pod odmocninou

Důležitá upozornění.

- Umocnění nerovnice (na druhou) je obecně důsledkovou úpravou. Při použití důsledkové úpravy je zkouška nutnou součástí řešení nerovnice. Vyhledem k tomu, že nerovnice má zpravidla nekonečně mnoho kořenů, není tento postup prakticky realizovatelný. Je tedy potřeba se důsledkové úpravě při řešení nerovnice vyhnout.

- V případě, že umocňujeme nerovnici, jejíž obě strany jsou nezáporné, je tato úprava dokonce ekvivalentní.

Postup řešení nerovnice s neznámou pod odmocninou.

1. Stanovíme definiční obor zadané nerovnice - výrazy pod odmocninami musí být nezáporné.

2. Pokračujeme ve dvou větvích:

   a) V případě, že jsou obě strany nerovnice nezáporné, umocníme ji. Jde o ekvivalentní úpravu, pomocí níž se (postupně) zbavujeme odmocnin.

   b) Jestliže výrazy na každé straně nerovnice mají různá znaménka, můžeme o splnění či nesplnění takové nerovnosti rozhodnout přímo (bez dalších úprav).

Praktická realizace tohoto postupu je patrná v následujících řešených příkladech.

Řešené příklady. V $\mathbb{R}$ řešte následující nerovnice:

1. Nerovnice
$$\sqrt{x+18} < 2-x$$
má definiční obor $D = \langle -18; \infty)$ (1. bod postupu). Pro všechna $x \in D$ je levá strana nerovnice nezáporná. Abychom ji mohli umocnit, musí být nezáporná rovněž strana pravá. To nastane pro $x \leq 2$. Řešení nerovnice se nám tedy rozpadá do dvou větví:

   a) (bod 2a) postupu) Pro $x \in \langle -18; 2\rangle$ po zmíněném umocnění máme
$$x+18 < (2-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x+18 < 4-4x+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x^2-5x-14 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (x+2)(x-7)\ ,$$
   takže
$$K_1 = [(-\infty; -2) \cup (7; \infty)] \cap \langle -18; 2\rangle = \langle -18; -2)\ .$$

   b) (bod 2b) postupu) Již víme, že pro $x \in (2; \infty)$ platí $L \geq 0$ a $P < 0$. Přitom má současně platit $L < P$, což nelze, tudíž $K_2 = \emptyset$.

   Závěr $K = K_1 \cup K_2 = \langle -18; -2)$.

2. Nerovnice
$$\sqrt{11-5x} > x-1$$
má definiční obor $D = \left(-\infty; \frac{11}{5}\right\rangle$ (1. bod postupu). Pro všechna $x \in D$ je levá strana nerovnice nezáporná. Abychom ji mohli umocnit, musí být nezáporná rovněž strana pravá. To nastane pro $x \geq 1$. Řešení nerovnice se nám tedy rozpadá do dvou větví:

   a) (bod 2a) postupu) Pro $x \in \left\langle 1; \frac{11}{5}\right\rangle$ po zmíněném umocnění máme
$$11-5x > (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 11-5x > x^2-2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > x^2+3x-10 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > (x+5)(x-2)\ ,$$
   takže
$$K_1 = (-5; 2) \cap \left\langle 1; \frac{11}{5}\right\rangle = \langle 1; 2)\ .$$

b) (bod 2b) postupu) Již víme, že pro $x \in (-\infty; 1)$ platí $L \geq 0$ a $P < 0$, takže je splněna i zadáním požadovaná nerovnost $L > P$, a to pro všechna $x \in (-\infty; 1)$, tudíž $K_2 = (-\infty; 1)$.

Závěr $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 2)$.

3. Nerovnice
$$\sqrt{-x^2 + 7x - 6} < 3 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(1-x)(x-6)} < 3 + 2x$$
má definiční obor $D = \langle 1; 6 \rangle$ (1. bod postupu). Pro všechna $x \in D$ je levá strana nerovnice nezáporná. Abychom ji mohli umocnit, musí být nezáporná rovněž strana pravá. To nastane pro $x \geq -\frac{3}{2}$. Protože tato podmínka je splněna pro všechna $x \in D$, nebude se nám řešení této nerovnice dále větvit. Pro všechna $x \in D$ je umocnění této nerovnice ekvivalentní úpravou, vychází nám
$$-x^2 + 7x - 6 < (3 + 2x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 7x - 6 < 9 + 12x + 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 5x^2 + 5x + 15 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 + x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\,.$$
Tato nerovnice je tedy splněna vždy. Závěr $K = D = \langle 1; 6 \rangle$.

4. Nerovnici
$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$$
bude třeba vzhledem k většímu počtu v ní se vyskytujících odmocnin umocňovat opakovaně. Proto bude účelné ji nejprve přepsat do tvaru, ve kterém bude každá odmocnina vystupovat s kladným koeficientem, protože pak budou pro všechna x z jejího definičního oboru obě její strany nezáporné a budeme ji moci rovnou ekvivalentně umocnit. Definiční obor nerovnice je $D = \langle 1; \infty)$. Takže pro všechna $x \in D$ platí
$$\sqrt{x+3} > \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x+3}\right)^2 > \left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x + 3 > 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1} + x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 > 3x - 2 + 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 5 - 2x > 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\,. \tag{1}$$
Nyní potřebujeme opět umocňovat. Snadno zkontrolujeme, že nerovnice je definovaná pro všechna $x \in D$, ale ne pro všechna $x \in D$ jsou obě její strany nezáporné. Proto bude potřeba výpočet dále rozvětvit.

a) Levá strana nerovnice je nezáporná právě tehdy, když $x \leq \frac{5}{2}$. Pro $x \in \left\langle 1; \frac{5}{2} \right\rangle$ jsou tedy obě strany nerovnice (1) nezáporné a díky tomu ji můžeme umocnit, přičemž se jedná o ekvivalentní úpravu. Pro tato x tedy platí
$$5 - 2x > 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \quad \Leftrightarrow \quad (5 - 2x)^2 > 4\left(2x^2 - 3x + 1\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 25 - 20x + 4x^2 > 8x^2 - 12x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 4x^2 + 8x - 21 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > (2x + 7)(2x - 3)\,,$$
Takže
$$K_1 = \left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \cap \left\langle 1; \frac{5}{2} \right\rangle = \left\langle 1; \frac{3}{2} \right)\,.$$

b) Pokud $x \in \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$, vidíme, že v nerovnici (1) je $L < 0$, $P \geq 0$ a přitom má platit $L > P$, což nelze, takže $K_2 = \emptyset$.

Dostáváme tak závěr výpočtu
$$K = K_1 \cup K_2 = \left\langle 1; \frac{3}{2} \right)\,.$$

5. Nerovnici

$$\sqrt{x+4+6\sqrt{x-5}} \leq 2$$

je výhodné řešit s využitím substituce $y = \sqrt{x-5}$. Odtud dostaneme $x = y^2 + 5$. Pro zadanou nerovnici tak postupně dostáváme

$$\sqrt{(y^2+5)+4+6y} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y^2+6y+9} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(y+3)^2} \leq 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |y+3| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq y \leq -1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x-5} \leq -1\,.$$

Poslední podmínku však nelze splnit. Nemusíme se tedy zabývat podmínkami a můžeme rovnou psát, že $K = \emptyset$.

6. Nerovnice

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{5-x}$$

má definiční obor $D = (-1;\infty) - \{5\}$ (1. bod postupu). Její pravá strana je nezáporná (v našem případě dokonce kladná) právě tehdy, když $x < 5$. Řešení nerovnice se nám tedy rozpadá do dvou větví:

a) (bod 2a) postupu) Pro $x \in (-1;5)$ tedy můžeme nerovnici ekvivalentně umocnit a ještě využít toho, že oba jmenovatelé jsou kladní a lze se tak rychle zbavit zlomků:

$$\frac{1}{x+1} > \frac{1}{(5-x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (5-x)^2 > x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 25-10x+x^2 > x+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-11x+24 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-8) > 0\,,$$

takže $K_1 = [(-\infty;3) \cup (8;\infty)] \cap (-1;5) = (-1;3)$.

b) (bod 2b) postupu) Ve zbytku definičního oboru, tj. pro $x \in (5;\infty)$ pak platí, že $L > 0$ a $P < 0$, takže požadovaná nerovnost $L > P$ je splněna. Je tedy $K_2 = (5;\infty)$.

Závěr $K = K_1 \cup K_2 = (-1;3) \cup (5;\infty)$.

Zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

1. $$2\sqrt{x-1} < x\,,$$

2. $$\sqrt{2x+14} > x+3\,,$$

3. $$\sqrt{x+2} > x\,,$$

4. $$\sqrt{5-2x} \geq 6x-1\,,$$

5.
$$\sqrt{x^2-4x} > x-3\,,$$
6.
$$\sqrt{3x-x^2} < 4-x\,,$$
7.
$$\sqrt{19+x-8\sqrt{x+3}} < 3\,,$$
8.
$$\frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} < \frac{1}{2}\,,$$
9.
$$\sqrt{x}-3 \le \frac{2}{\sqrt{x}-2}\,,$$
10.
$$3\sqrt{x}-\sqrt{5x+5} > 1\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. $K = \langle 1; 2) \cup (2; \infty)$,
2. $K = \langle -7; 1)$,
3. $K = \langle -2; 2)$,
4. $K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$,
5. $K = (-\infty; 0\rangle \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$,
6. $K = \langle 0; 3\rangle$,
7. pomocí substituce $y = \sqrt{x+3}$ lze zadanou nerovnici postupně upravit do tvaru $|y-4| < 3$, $K = (-2; 46)$,
8. $K = (-\infty; -4) \cup \left\langle \frac{1}{2}; \frac{8}{7}\right)$,
9. pomocí substituce $y = \sqrt{x}$ lze zadanou nerovnici postupně upravit do tvaru
$$\frac{(y-4)\,(y-1)}{y-2} \le 0\,, \qquad \dots \qquad K = \langle 0; 1\rangle \cup (4; 16\rangle\;,$$
10. $K = (4; \infty)$, nerovnici je třeba dvakrát umocňovat, před prvním umocněním je vhodné ji upravit do tvaru
$$3\sqrt{x} > \sqrt{5x+5}+1\,,$$
před druhým umocněním je třeba pokračovat ve dvou větvích (viz 2. bod postupu).

Nerovnice s parametry

Řešené příklady.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$3\,(px+1) \leq 9p + x\,,$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Platí

$$3\,(px+1) \leq 9p + x \quad \Leftrightarrow \quad 3px - x \leq 9p - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(3p-1) \leq 3\,(3p-1)\ .$$

Na rozdíl od rovnice musíme nyní rozlišit 3 případy, neboť u nerovnice je potřebné znát i znaménko výrazu, kterým dělíme.

a) Pokud $p = \frac{1}{3}$, je řešená nerovnice tvaru $0x \leq 0$, takže je splněna pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

b) Když $p > \frac{1}{3}$, je $3p - 1 > 0$ a platí

$$x\,(3p-1) \leq 3\,(3p-1) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3\,.$$

c) Jestliže $p < \frac{1}{3}$, pak $3p - 1 < 0$, takže

$$x\,(3p-1) \leq 3\,(3p-1) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3\,.$$

Závěr jako obvykle zapíšeme do tabulky

p	K
$\left\{\frac{1}{3}\right\}$	$\mathbb{R}$
$\left(\frac{1}{3};\infty\right)$	$(-\infty;3\rangle$
$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$	$\langle 3;\infty)$

.

2. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$x - 1 < \frac{2\,(2x+q)}{q^2}\,,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Začneme podmínkou $q \neq 0$. V opačném případě zadaná nerovnice nemá smysl. Za uvedené podmínky je $q^2 > 0$, takže tímto výrazem můžeme uvažovanou nerovnici vynásobit a jedná se přitom o ekvivalentní úpravu. Dále platí

$$x - 1 < \frac{2\,(2x+q)}{q^2} \quad \Leftrightarrow \quad q^2\,(x-1) < 4x + 2q \quad \Leftrightarrow \quad x\left(q^2 - 4\right) < q^2 + 2q \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\,(q-2)\,(q+2) < q\,(q+2)\ .$$

Podle znaménka výrazu $(q-2)\,(q+2)$ rozlišíme následující případy:

a) Možnost $(q-2)\,(q+2) = 0$ nastává pro dvě možné hodnoty parametru q:

   i. Pokud $q = 2$, dosazením máme $0 < 8$, což platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

   ii. Jestliže $q = -2$, po dosazení obdržíme $0 < 0$, což neplatí nikdy.

b) Varianta $(q-2)\,(q+2) > 0$ nastává právě tehdy, když $q \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$. Potom platí

$$x\,(q-2)\,(q+2) < q\,(q+2) \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{q}{q-2}\,.$$

c) Konečně situace $(q-2)(q+2) < 0$ se realizuje když a jen, když $q \in (-2;0) \cup (0;2)$. V tom případě při dělení záporným číslem musíme změnit znaménko nerovnosti, tedy

$$x(q-2)(q+2) < q(q+2) \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{q}{q-2}\,.$$

Dostáváme tak výslednou tabulku

q	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{2\}$	$\mathbb{R}$
$\{-2\}$	$\emptyset$
$(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$	$\left(-\infty; \frac{q}{q-2}\right)$
$(-2;0) \cup (0;2)$	$\left(\frac{q}{q-2}; \infty\right)$

.

3. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$\sqrt{4x^2+4x+1} > 6a\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Platí

$$\sqrt{4x^2+4x+1} > 6a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(2x+1)^2} > 6a \quad \Leftrightarrow \quad |2x+1| > 6a \quad \Leftrightarrow \quad \left|x+\frac{1}{2}\right| > 3a\,.$$

a) Vzhledem k tomu, že absolutní hodnota je nezáporná, bude tato nerovnice pro záporná a splněna vždy.

b) Pokud $a = 0$, nebude uvedená nerovnice platit jedině v případě, kdy je výraz v absolutní hodnotě nulový, tj. pro $x = -\frac{1}{2}$.

c) Matematicky „nejzajímavější“ je pak případ, kdy $a > 0$. Zadanou nerovnici tak můžeme řešit na základě geometrického významu absolutní hodnoty. Řešená nerovnice „říká“, že hledáme taková x, jejichž vzdálenost (na číselné ose) od (obrazu) čísla $-\frac{1}{2}$ je větší než $3a$, tzn. vyhoví všechna $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} - 3a\right) \cup \left(-\frac{1}{2} + 3a; \infty\right)$.

Uvedená zjištění už jen shrneme do tabulky

a	K
$(-\infty;0)$	$\mathbb{R}$
$\{0\}$	$\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
$(0;\infty)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{2} - 3a\right) \cup \left(-\frac{1}{2} + 3a; \infty\right)$

.

4. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$x^2 - 6bx + 9b^2 - 4 \leq 0\,,$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Platí

$$x^2 - 6bx + 9b^2 - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3b)^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x-3b| \leq 2\,.$$

Vidíme, že i v tomto případě bude výhodné využít geometrický význam absolutní hodnoty. Vzdálenost (obrazu) čísla x na číselné ose má být od (obrazu) čísla $3b$ vzdálena nejvýše o 2. Rychle tak získáváme závěr

b	K
$\mathbb{R}$	$\langle 3b-2; 3b+2 \rangle$

.

5. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž je řešením nerovnice

$$(p-1)\,x^2 - (p-1)\,x + p + 1 > 0$$

libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Je-li $p = 1$, jde o nerovnici $2 > 0$, která platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, takže $p = 1$ je jednou z hledaných hodnot. Dále uvažujme případ, kdy $p \neq 1$. Aby byla nerovnice vždy splněna je nutné a stačí, aby

$$D < 0 \quad \text{a} \quad p - 1 > 0\,.$$

Počítejme

$$D = [-(p-1)]^2 - 4\,(p-1)\,(p+1) = (p-1)^2 - 4\,(p-1)\,(p+1) =$$
$$= (p-1)\,[p - 1 - 4\,(p+1)] = (p-1)\,(-3p-5) = -(p-1)\,(3p+5)\;.$$

Vidíme, že

$$D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (1;\infty)\;.$$

Protože dále má, jak víme, ještě platit, že $p > 1$, dostáváme v této větvi výpočtu právě ta p, pro něž $p > 1$. Dohromady zjišťujeme, že vyhoví všechna $p \geq 1$, tj. $p \in \langle 1;\infty)$.

6. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž nerovnice

$$(p+1)\,x^2 + (p+1)\,x + p - 1 \geq 0$$

nemá v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

Řešení. Opět začneme lineárním případem. Pro $p = -1$ dostávámáme tvrzení $-2 \geq 0$, takže nerovnice neplatí. Hodnota $p = -1$ tedy patří mezi hledané. Dále studujme případ kvadratické nerovnice, tedy pro $p \neq -1$. Ta nebude mít žádné řešení, právě tehdy, když

$$D < 0 \quad \text{a} \quad p + 1 < 0\,.$$

Platí

$$D = (p+1)^2 - 4\,(p+1)\,(p-1) = (p+1)\,[p + 1 - 4\,(p-1)] = (p+1)\,(5-3p)\;,$$

takže

$$D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3};\infty\right)\;.$$

Po zohledněné všech uvedených podmínek tak vidíme, že úloze vyhoví všechna $p \leq -1$, tj. $p \in (-\infty; -1\rangle$.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$

   a)
$$4\,(x + 2p) \geq p\,(p + x) + 16\,,$$

   b)
$$\frac{p\,(x-1)}{p^2+6} > 1 - \frac{3\,(x+4)}{p^2+6}\,,$$

   c)
$$\frac{xp^2+2}{p} - x \leq \frac{2}{p^2}\,,$$

   d)
$$\frac{1}{1-p^2} < \frac{1-x-px}{p^2-1}\,,$$

   e)
$$\sqrt{9x^2-6x+1} \leq 6p+9\,,$$

   f)
$$\sqrt{x^2+2px+p^2} > 5\,,$$

   g)
$$x^2 - 12x + 35 \geq 25p^2 + 10p\,,$$

   h)
$$x^2 - 8px + 16p^2 - 9 < 0\,,$$

2. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž má příslušná nerovnice množinu kořenů $K = \mathbb{R}$

   a)
$$(p-1)\,x^2 - (p+1)\,x + p + 1 > 0\,,$$

   b)
$$px^2 + 2px - p - 2 \leq 0\,.$$

3. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž má příslušná nerovnice množinu kořenů $K = \emptyset$

   a)
$$\left(p - p^2\right) x^2 + 2px - 1 \geq 0\,,$$

   b)
$$(p-3)\,x^2 - 2px + p < 0\,,$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $x\,(4-p) \geq (4-p)^2$,

p	K
$\{4\}$	$\mathbb{R}$
$(4;\infty)$	$(-\infty; 4-p\rangle$
$(-\infty;4)$	$\langle 4-p;\infty)$

.

b) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $x\,(p+3) > (p+3)\,(p-2)$,

p	K
$\{-3\}$	$\emptyset$
$(-3;\infty)$	$(p-2;\infty)$
$(-\infty;-3)$	$(-\infty;p-2)$

.

c) Pro $p \neq 0$ lze nerovnici upravit do ekvivalentního tvaru

$$x\,(p-1) \leq \frac{-2\,(p-1)}{p^2},$$

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{1\}$	$\mathbb{R}$
$(-\infty;0)\cup(0;1)$	$\left\langle -\frac{2}{p^2};\infty\right)$
$(1;\infty)$	$\left(-\infty;-\frac{2}{p^2}\right\rangle$

.

d) Pro $p \neq \pm 1$ lze nerovnici upravit do ekvivalentního tvaru

$$\frac{x}{p-1} < \frac{2}{p^2-1},$$

p	K
$\{\pm 1\}$	nemá smysl
$(1;\infty)$	$\left(-\infty;\frac{2}{p+1}\right)$
$(-\infty;1)-\{-1\}$	$\left(\frac{2}{p+1};\infty\right)$

.

e) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $\left|x-\frac{1}{3}\right| \leq 2p+3$,

p	K
$\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$	$\emptyset$
$\left\{-\frac{3}{2}\right\}$	$\left\{\frac{1}{3}\right\}$
$\left(-\frac{3}{2};\infty\right)$	$\left\langle -2p-\frac{8}{3}; 2p+\frac{10}{3}\right\rangle$

.

f) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $|x+p| > 5$,

p	K
$\mathbb{R}$	$(-\infty;-p-5)\cup(-p+5;\infty)$

.

g) Přičtěte k oběma stranám nerovnice 1 a všimněte si, že se jedná o úplné čtverce (kvadráty). Nerovnici pak lze upravit do ekvivalentního tvaru $|x-6| \geq |5p+1|$,

p	K
$\left\{-\frac{1}{5}\right\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{5}\right\}$	$(-\infty;6-|5p+1|\rangle \cup \langle 6+|5p+1|;\infty)$

.

h) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $|x-4p| < 3$,

p	K
$\mathbb{R}$	$(4p-3;4p+3)$

.

2. Výpočet je podobný jako v příkladu 5.
   a) Pro $p \neq 1$ je třeba, aby $p > 1$ a současně $D = (5-3p)(p+1) < 0$. Vyhovují všechna $p > \frac{5}{3}$.
   b) Pro $p \neq 0$ je třeba, aby $p < 0$ a současně $D = 8p(p+1) \leq 0$. Vyhovují všechna $p \in \langle -1; 0)$.

3. Výpočet je podobný jako v příkladu 6.
   a) Platí právě pro všechna $p \leq 0$ (diskriminant příslušné kvadratické nerovnice je $D = 4p$).
   b) Nevyhoví žádné p, neboť diskriminant příslušné kvadratické nerovnice, který má být nekladný, je $D = 12p$ (tzn. $p \leq 0$) a současně má být $p > 3$.