jcmm

Vybrané druhy speciálních typů rovnic

Mgr. Aleš Kobza, Ph. D.

Anotace:

Text představuje podporu k výuce celku „Rovnice a nerovnice“ na SŠ, jeho využití je předpokládáno zejména na gymnáziích. Tento materiál se zaměřuje na části „Soustavy nelineárních rovnic“ a „Lineární diofantické rovnice“.

Obsahuje jednak teoretický základ (včetně zdůvodnění platnosti uváděných tvrzení, či vysvětlení používaných postupů), část s řešenými příklady, na níž navazuje sada úloh k procvičení, která je doplněná výsledky a případnými stručnými návody k řešení těchto úloh.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Vybrané druhy speciálních typů rovnic

Soustavy nelineárních rovnic

V této části se budeme zabývat takovými případy soustav rovnic, z nichž alespoň jedna bude nelineární. Tato problematika může být velmi obsáhlá a rovněž obtížná. V obecném případě totiž nelze najít žádný univerzální algoritmus, jak takové soustavy řešit. Zaměříme se pouze na takové typy úloh, které budeme ve vyšších ročnících (například při studiu analytické geometrie) potřebovat umět řešit. Způsoby řešení takových soustav vysvětlíme na konkrétních příkladech.

Řešené příklady.

1. Vyřešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 - 9y^2 - 2x + 27y - 20 &=& 0 \\ 3x + 5y - 8 &=& 0 \end{array}.$$

Řešení. V situaci, kdy je jedna rovnice soustavy lineární a druhá kvadratická, je výhodné použít dosazovací metodu. Z jednodušší, tzn. lineární, rovnice vyjádříme jednu z neznámých a dosadíme za ní do složitější, tzn. kvadratické, rovnice. V našem případě takto ze druhé rovnice soustavy dostáváme

$$3x = 8 - 5y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{8-5y}{3}\,. \tag{1}$$

Po dosazení za x do první rovnice soustavy pak již řešíme jednu rovnici o jedné neznámé

$$4\left(\frac{8-5y}{3}\right)^2 - 9y^2 - 2\cdot\frac{8-5y}{3} + 27y - 20 = 0\,.$$

Po jejích rutinních ekvivalentních úpravách zjistíme, že tato rovnice má dvě řešení $y_1 = 1$ a $y_2 = \frac{28}{19}$. Když dosadíme do vyjádření (1), získáme tím odpovídající hodnoty zbývající neznámé $x_1 = 1$ a $x_2 = \frac{4}{19}$, takže $K = \left\{[1;1]\,,\left[\frac{4}{19};\frac{28}{19}\right]\right\}$.

2. Vyřešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 + 9y^2 &=& 36 \\ 3x^2 + 5x + 3y^2 &=& 12 \end{array}.$$

Řešení. Nyní není lineární žádná z rovnic soustavy. Vyjádření x či y by tak nebylo úplně snadné. Dívejme se tedy na to, která z proměnných vystupuje v zadaných rovnicích v jednodušším vyjádření. Vidíme, že je to proměnná y, která se navíc v obou rovnicích objevuje „jen“ ve druhých mocninách. Tuto proměnnou se nám tedy podaří poměrně snadno vyloučit například užitím sčítací metody. Vynásobíme-li druhou rovnici soustavy třemi a odečteme-li od takto upravené rovnice rovnici první, máme

$$3\,(2) - (1):\; 5x^2 + 15x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\,(x+3) = 0\,.$$

Zjišťujeme, že $x_1 = 0$ a $x_2 = -3$. Zbývá pro každou z těchto hodnot dopočítat příslušné (příslušná) y. To provedeme tak, že tuto hodnotu dosadíme do libovolné z rovnic zadané soustavy. Například po dosazení za x_1 do druhé rovnice soustavy dostaneme

$$3y^2 = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad y_{1,2} = \pm 2\,.$$

Dosadíme-li za x_2 tentokrát třeba do první rovnice soustavy, zjišťujeme, že

$$36 + 9y^2 = 36 \qquad \Leftrightarrow \qquad 9y^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 0\,.$$

Řešená soustava má tedy právě tři řešení, $K = \{[0;\pm 2]\,,[-3;0]\}$.

3. Vyřešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} (x-1)(y+5) & = & 100 \\ (x-2)(y+6) & = & 99 \end{array}.$$

Řešení. Na tomto příkladu uvidíme, že vyjádření jedné z neznámých je možné, i když si musíme nejprve rozmyslet podmínky. K tomuto vyjádření je totiž potřeba dělit výrazem s neznámou. Abychom například z první rovnice vyjádřili y, potřebujeme rovnici tuto dělit výrazem $x-1$, což lze jen, pokud $x \neq 1$. Kdyby bylo $x = 1$, byla by levá strana rovnice rovna nule a uvedená rovnost by nemohla platit. Vidíme, že potřebnou podmínku $x \neq 1$ tedy můžeme učinit bez újmy na obecnosti (tzn. jiná alternativa není možná). Dostáváme tak

$$y+5 = \frac{100}{x-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{100}{x-1} - 5\,. \tag{2}$$

Dosadíme-li za y do druhé rovnice soustavy, budeme již dále řešit rovnici o jediné neznámé

$$(x-2)\left(\frac{100}{x-1} - 5 + 6\right) = 99 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)(x+99)}{x-1} = 99 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 97x - 198 = 99x - 99 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 99 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-11)(x+9) = 0\,.$$

Odtud je již patrné, že tato rovnice má právě dva kořeny, a to $x_1 = 11$ a $x_2 = -9$. Jestliže dosadíme do vyjádření (2), najdeme tím odpovídající hodnoty druhé neznámé $y_1 = 5$ a $y_2 = -15$, takže $K = \{[11; 5], [-9; -15]\}$.

4. Vyřešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 - 4y^2 & = & 15 \\ xy & = & 1 \end{array}.$$

Řešení. Někdy může postup z předchozí úlohy vést k tomu, že dostaneme sice rovnici v jediné proměnné, ale vyššího stupně. Formálně může pomoci substituce, pomocí které lze stupeň takto získané rovnice snížit. Kdyby $y = 0$, pak nemůže být druhá rovnice nikdy splněna ($0 \neq 1$). Musí tedy platit $y \neq 0$, takže vyjádření x ze druhé rovnice je její ekvivalentní úpravou

$$xy = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{y}\,. \tag{3}$$

Po dosazení do první rovnice soustavy obdržíme

$$4 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2 - 4y^2 = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4 - 4y^4 = 15y^2\,,$$

což je rovnice čtvrtého stupně. Protože však obsahuje jen sudé mocniny y, sníží substituce $z = y^2$ její stupeň. Po jejím provedení dostáváme

$$4 - 4z^2 = 15z \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = 4z^2 + 15z - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad (4z-1)(z+4) = 0\,,$$

tudíž $z_1 = \frac{1}{4}$ a $z_2 = -4$. Nyní se vrátíme do původní proměnné. Dosazením do substituční rovnice máme $\frac{1}{4} = y^2$, takže $y = \pm\frac{1}{2}$, respektive $-4 = y^2$, což v $\mathbb{R}$ nelze. Konečně dosazením do vyjádření (3), dopočteme $x = \pm$. Soustava tedy má dvě řešení $K = \left\{\left[2; \frac{1}{2}\right], \left[-2; -\frac{1}{2}\right]\right\}$.

5. Vyřešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} (x-4)^2 + y^2 & = & z^2 \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 & = & z^2 \\ (x-5)^2 + (y+7)^2 & = & z^2 \end{array}.$$

Řešení. Obsahuje-li soustava více rovnic se stejnými výrazy, bývá výhodné jednotlivé rovnice odečítat, abychom tyto výrazy eliminovali. Nejprve se zbavme závorek

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x^2 - 8x + 16 + y^2 & = & z^2 \\ (2) & x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 & = & z^2 \\ (3) & x^2 - 10x + 25 + y^2 + 14y + 49 & = & z^2 \end{array}.$$

Vidíme, že všech druhých mocnin se zbavíme, když budeme rovnice odečítat. Například úpravami

$$(2) - (1) \;\; 16x + 8y + 16 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x + y + 2 = 0 \tag{4}$$

a

$$(3) - (1) \;\; -2x + 14y + 58 = 0 \tag{5}$$

dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Tu vyřešíme například pomocí součtu rovnic (4) a (5). Získáme tím rovnici $15y + 60 = 0$, odkud vypočteme, že $y = -4$. Dosazením do (4) máme

$$2x - 4 + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1\,.$$

Zbývá určit neznámou z. Tu dopočteme dosazením již nalezených hodnot x a y do libovolné ze zadaných rovnic soustavy. Nejjednodušší tvar má ta první, takže

$$(1-4)^2 + (-4)^2 = z^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 25 = z^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \pm 5\,,$$

tedy $K = \{[1; -4; \pm 5]\}$.

Zadání úloh.

1. Vyřešte v $\mathbb{R}^2$ soustavy rovnic

   a)
$$\begin{aligned} x^2+y^2+3x &= 4 \\ x-2y+4 &= 0 \end{aligned},$$

   b)
$$\begin{aligned} 3x^2+3y^2-26x-16y+61 &= 0 \\ x-y &= -1 \end{aligned},$$

   c)
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 5\,265 \\ x^2-y^2 &= 2\,673 \end{aligned},$$

   d)
$$\begin{aligned} 4x^2-5y^2 &= -320 \\ 3x^2+2y^2 &= 588 \end{aligned},$$

   e)
$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= 60 \\ xy &= 224 \end{aligned},$$

   f)
$$\begin{aligned} x+xy &= 60 \\ y+xy &= 55 \end{aligned},$$

   g)
$$\begin{aligned} 5\sqrt{x+y}-\tfrac{18}{\sqrt{x+y}} &= 27 \\ \sqrt{x^2-y^2}-5\sqrt{x-y} &= 4 \end{aligned}.$$

2. Vyřešte v $\mathbb{R}^3$ soustavy rovnic

   a)
$$\begin{aligned} \tfrac{6}{x+y}+\tfrac{5}{y+3z} &= 2 \\ \tfrac{15}{x+y}-\tfrac{4}{x-2z} &= \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{10}{y+3z}-\tfrac{7}{x-2z} &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned},$$

   b)
$$\begin{aligned} (-x-3)^2+(2-y)^2 &= z^2 \\ (x+1)^2+(y-4)^2 &= z^2 \\ (x-3)^2+y^2 &= z^2 \end{aligned}.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) $K = \{[-4; 0], [0; 2]\}$,

   b) $K = \{[4; 5], [2; 3]\}$,

   c) $K = \{[63; \pm 36], [-63; \pm 36]\}$,

   d) $K = \{[10; \pm 12], [-10; \pm 12]\}$,

   e) $K = \{[16; 14], [-16; -14]\}$,

   f) zdůvodněte (promyslete si otázku podmínek), že například následující úpravy první rovnice jsou ekvivalentní

   $$x + xy = 60 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(1 + y) = 60 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{60}{y + 1}$$

   a dosaďte do druhé rovnice $K = \{[10; 5], [-6; -11]\}$,

   g) uvažte substituci $a = \sqrt{x + y}$ a $b = \sqrt{x - y}$, $K = \{[26; 10]\}$.

2. a) Substitucí $a = \frac{1}{x+y}$, $b = \frac{1}{y+3z}$ a $c = \frac{1}{x-2z}$ dostanete soustavu lineárních rovnic, $K = \{[4; 2; 1]\}$,

   b) $K = \left\{ \left[0; 1; \pm\sqrt{10}\right] \right\}$.

Lineární diofantické rovnice

Definice.

Lineární diofantickou rovnicí (dále stručně jen LDR) se dvěma neznámými $x, y \in \mathbb{Z}$ rozumíme každou rovnici tvaru

$$ax + by + c = 0\,, \tag{6}$$

kde celá čísla a, b, c taková, že $a \neq 0$ a $b \neq 0$ nazýváme jejími koeficienty.

Poznámky.

1. V některé literatuře se používá termín *lineární diofantovské rovnice.* Název tohoto typu rovnic je odvozen od jména řeckého matematika Diofanta z Alexandrie, který jejich chování již téměř před dvěma tisíci lety studoval.

2. Z předchozího studia již umíme, že řešit rovnici (6) v $\mathbb{R}^2$ (tj. s reálnými koeficienty). Víme, že v tom případě má taková rovnice nekonečně mnoho řešení.

3. Uvidíme, že v oboru celých čísel bude třeba řešit rovnici formálně stejného tvaru jinými prostředky.

4. Zjistíme, že „nejbohatší“ bude problematika řešení rovnice (6) v $\mathbb{N}^2$. Ukážeme si, že v tomto případě uvažovaná rovnice nemusí mít žádné řešení, může mít nekonečně mnoho řešení, ale může mít také konečný počet řešení.

5. Protože budeme pracovat s celými čísly, řada našich úvah se bude opírat o jejich vlastnosti probírané v kapitole o dělitelnosti. V případě potřeby si v této kapitole příslušné vlastnosti, které dále budeme bez zdůvodnění používat, připomeňte.

Nyní si představíme větu, která nám nabídne jednoduché kritérium, pomocí kterého rychle zjistíme, zda má rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$ nějaké řešení.

Věta (tzv. existenční věta pro LDR).

Rovnice (6) má v $\mathbb{Z}^2$ řešení právě tehdy, když $(|a|\,, |b|) \mid c$.

Důkaz. Označme d největšího společného dělitele přirozených čísel $|a|$ a $|b|$, tedy $d = (|a|\,, |b|)$.

Předpokládejme nejprve, že $[x_0, y_0]$ je řešením rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$. Platí tedy $c = -ax_0 - by_0$. Neboť $d \mid |a|$ a $d \mid |b|$, platí také, že $d \mid a$ a $d \mid b$. Proto musí d dělit i libovolnou jejich lineární kombinaci, zejména číslo $-ax_0 - by_0 = c$, takže $d \mid c$.

Nyní předpokládejme, že $d \mid c$. To znamená, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $c = k \cdot d$. Protože $d = (|a|\,, |b|)$, podle Bezoutovy rovnosti dále existují celá čísla m a n taková, že $d = |a|\, m + |b|\, n$. Musí tedy existovat celá čísla $\overline{m}$ a $\overline{n}$, pro něž platí $d = a\overline{m} + b\overline{n}$. Dohromady tak máme, že

$$c = k \cdot d = k \cdot (a\overline{m} + b\overline{n}) = a \cdot k\overline{m} + b \cdot k\overline{n}\,,$$

což znamená, že uspořádaná dvojice $[-k\overline{m}; -k\overline{n}]$je řešením rovnicce (6).

Příklad.

Rovnice $6x - 4y + 3 = 0$ tedy nemá v $\mathbb{Z}^2$ žádné řešení, neboť $(6; |-4|) = 2$ a $2 \nmid 3$. Protože tato rovnice nemá řešení v $\mathbb{Z}^2$, nemá rovněž žádné řešení v $\mathbb{N}^2$.

Když už víme, jak lze poznat, zda má rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$ nějaké řešení, nabízí se další otázka. Existuje-li řešení rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$, je možné něco zjistit o počtu všech řešení rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$? Na tuto otázku nám odpoví další věta. Klíčovým obratem předchozího důkazu bylo užití Bezoutovy rovnosti. Při jejím studiu jsme si ukazovali, že taková čísla m a n neexistují jednoznačně, ale že vyhovujících dvojic vhodných celých čísel existuje nekonečně mnoho. Proto by nás tato odpověď neměla překvapit.

Věta.

Pokud má rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$ alespoň jedno řešení, pak jich má v $\mathbb{Z}^2$ nekonečně mnoho.

Důkaz. Nechť $[x_0, y_0]$ je řešením rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$. Platí tedy

$$ax_0 + by_0 + c = 0\,. \tag{7}$$

Hledejme vyjádření dalších řešení $[x, y]$ studované rovnice. Odečtením rovnic (6) a (7) dostaneme

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0\,. \tag{8}$$

Označme opět $d = (|a|\,, |b|)$. Odtud vyplývá, že $d \mid a$ a $d \mid b$, takže existují nenulová celá čísla r a s s vlastností $a = dr$ a $b = ds$, přičemž $(|r|\,; |s|) = 1$. Z uvedeného po dosazení do (8) dostáváme

$$dr\,(x - x_0) + ds\,(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\,(x - x_0) + s\,(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - x_0 = \frac{-s\,(y - y_0)}{r}\,. \tag{9}$$

Neboť $(|r|\,; |s|) = 1$, musí podle fundamentální věty aritmetiky platit, že $r \mid (y - y_0)$. Proto existuje celé číslo t takové, že $rt = y - y_0$. Odtud máme

$$y = y_0 + rt\,. \tag{10}$$

Když dosadíme (10) do (9), dostaneme

$$x - x_0 = \frac{-s\,(y_0 + rt - y_0)}{r} = \frac{-srt}{r} = -st \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 - st\,. \tag{11}$$

Zapíšeme-li získaná vyjádření (11) a (10) v původních proměnných, obdržíme vztahy

$$x = x_0 - \frac{b}{(|a|\,, |b|)} \cdot t \qquad \text{a} \qquad y = y_0 + \frac{a}{(|a|\,, |b|)} \cdot t\,, \quad \text{kde } t \in \mathbb{Z}\,. \tag{12}$$

Ve tvaru (12) jsme tedy našli další řešení uvažované rovnice (6), a to dokonce pro libovolné $t \in \mathbb{Z}$, jak se lze snadno přesvědčit dosazením vztahů (12) do (6). Znamená to, že dalších řešení rovnice (6) existuje dokonce nekonečně mnoho. Tím je důkaz ukončen.

Pozorný čtenář si jistě všiml, že uvedený důkaz je možné zkrátit tak, že rovnou napíšeme vzorce (12). Nevysvětlili bychom tím sice, kde jsme je vzali, ale platnost tvrzení věty bychom tím prokázali. Byla by to však škoda. Tím, že jsme v důkazu provedli potřebný výpočet, jsme totiž ukázali více, než věta samotná tvrdila. Toto odvození také navíc zdůvodňuje, že neexistuje řešení rovnice (6), které by se nedalo popsat vzorci (12). Znamená to, že nalezením vzorců (12) jsme popsali všechna řešení studované rovnice (6). Kdyby se tedy někdo chtěl vzorce (12) naučit nazpaměť, byla by na tom založena metoda řešení rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$. Stačilo by „uhodnout“ jedno řešení této rovnice (tj. řešení, které jsme označili $[x_0, y_0]$) a množinu všech řešení rovnice (6) v $\mathbb{Z}^2$ bychom pak již jen zapsali užitím vzorců (12). Ilustrujme zmíněný konkrétním příkladem.

Příklad.

Rovnice $5x + 9y = -7$ v $\mathbb{Z}^2$ řešení mít musí, protože $(5; 9) = 1$ a $1 \mid 7$. Podle druhé věty pak víme, že tato rovnice proto musí mít v $\mathbb{Z}^2$ dokonce nekonečně mnoho řešení. Abychom je mohli zapsat, potřebujeme nějaké řešení $[x_0, y_0]$ této rovnice uhodnout. Dosazením do řešené rovnice můžete ověřit, že rovnice je splněna například pro dvojici $[x_0, y_0] = [4; -3]$. Užitím vzorců (12) pak dostáváme

$$x = 4 - \frac{9}{1} \cdot t = 4 - 9t \qquad \text{a} \qquad y = -3 + \frac{5}{1} \cdot t = -3 + 5t\,,$$

takže

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[4 - 9t; -3 + 5t]\,,\ \text{kde } t \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\,. \tag{13}$$

Kdybychom však tuto rovnici řešili v $\mathbb{N}^2$, zjistili bychom, že v této množině již žádné řešení nemá, protože pro všechna $x \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{N}$ platí $5x + 9y > 0$, takže $5x + 9y \neq -7$, tedy

$$K_{\mathbb{N}^2} = \emptyset\,.$$

Jistě se vám právě uvedený postup zdá neelegantní a protože matematika je nádherná, určitě chcete postupovat jinou metodou. :) V dalším na konkrétním příkladu ukážeme a vysvětlíme takový způsob řešení rovnice (6), který bude založen na přímém výpočtu a při jeho použití nebude třeba nic hádat ani si pamatovat vzorce (12).

Příklad.

Řešme znovu rovnici $5x + 9y = -7$ v $\mathbb{Z}^2$. Nejprve ji vydělme tím z nenulových koeficientů a, b, který je v absolutní hodnotě menší, v našem případě pěti. Dostaneme tak

$$x + \frac{9}{5}y = -\frac{7}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 2y - \frac{1}{5}y = -1 - \frac{2}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 2y + 1 = \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}\,. \tag{14}$$

Smyslem provedených úprav je na jedné straně rovnice shromáždit výrazy tvořící číslo, které je evidentně celé. V našem případě je to levá strana rovnice. Díky uvedené rovnosti, pak musí být i na pravé straně rovnice celé číslo, označme jej k. Znamená to, že

$$k = \frac{1}{5}y - \frac{2}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad 5k = y - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 5k + 2\,.$$

Z předchozího řádku pak vypočteme

$$x + \frac{9}{5} \cdot (5k + 2) = -\frac{7}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{9}{5} \cdot (5k + 2) - \frac{7}{5} = -9k - 5\,.$$

Zjistili jsme tak, že

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[-5 - 9k; 2 + 5k]\,,\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\,. \tag{15}$$

Na první nepozorný pohled se může zdát, že výsledky (13) a (15) nejsou stejné. Opak je však pravdou. Například výše zmíněnéné řešení $[x_0, y_0] = [4; -3]$ je obsaženo jak ve tvaru (13) (pro $t = 0$), tak ve tvaru (15) (tentokrát pro $k = -1$). Odtud je patrné, že stejná řešení jisté LDR lze zapsat ve formálně různých tvarech, které jsou však ekvivalentní. Doplňme ještě, že při úpravě (14) jsme postupovali šikovně a postup výpočtu si tím zkrátili. Ovšem i v případě, že bychom při rozdělování na celé a desetinné části zanechali (v absolutních hodnotách) větší zbytky, by takový postup vedl k cíli. Přesvědčme se o tom ještě tímto výpočtem, který představuje (méně vhodnou) alternativu k úpravám (14)

$$x + \frac{9}{5}y = -\frac{7}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y + \frac{4}{5}y = -2 + \frac{3}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y + 2 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}y\,. \tag{16}$$

Protože $x + y + 2 \in \mathbb{Z}$, existuje tedy $l \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$l = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}y \qquad \Leftrightarrow \qquad 5l = 3 - 4y\,.$$

Nyní zopakujeme úvodní krok, tj. dělení znovu (v absolutní hodnotě) menším z koeficientů u (celočíselných) neznámých. Tentokrát tedy budeme dělit čtyřmi

$$\frac{5}{4}l = \frac{3}{4} - y \qquad \Leftrightarrow \qquad l + \frac{1}{4}l = \frac{3}{4} - y \qquad \Leftrightarrow \qquad l + y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}l\,. \tag{17}$$

Opakujeme i další krok postupu. Levá strana poslední rovnice nabývá jedině celočíselných hodnot, proto existuje takové $m \in \mathbb{Z}$ pro, něž

$$m = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}l \qquad \Leftrightarrow \qquad 4m = 3 - l \qquad \Leftrightarrow \qquad l = 3 - 4m\,. \tag{18}$$

Pokud si uvedený postup promyslíte, uvědomíte si, že se jedná o jinou alternativu zápisu Eukleidova algoritmu (viz též užití Bezoutovy věty, která z tohoto algoritmu vychází v předchozím textu). Tento postup je proto konečný a vždy vede k cíli. „Probubláním“ tímto algoritmem vzhůru tedy dostaneme vyjádření původních proměnných x a y pomocí posledního celočíselného parametru (v našem případě m). Pomocí dosazení vyjádření (18) do (17) vypočteme

$$\frac{5}{4}(3-4m) = \frac{3}{4} - y \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}(3-4m) = -3+5m\,. \tag{19}$$

Konečně dosazením za y z (19) do (16) vypočteme x

$$x + \frac{9}{5}(-3+5m) = -\frac{7}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{9}{5}(-3+5m) - \frac{7}{5} = 4-9m\,.$$

Dostáváme tak závěr

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[4-9m; -3+5m]\,,\ \text{kde } m \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ ,$$

který odpovídá výše nalezenému vyjádření (13).

Řešené příklady.

1. Kolika způsoby lze zaplatit částku 75 korun výhradně pomocí dvacetikorun nebo pětikorun?

   Řešení. Přestože je zadaná úloha jednoduchá a je možné ji řešit zpaměti, popíšeme způsob jejího řešení pečlivě, abychom si jednotlivé kroky postupu dobře uvědomili. Označme d počet dvacetikorun a p počet pětikorun. Podle zadání má platit $20d + 5p = 75$, kde $d, p \in \mathbb{N}_0$. Abychom mohli pracovat s menšími koeficienty, nejprve tuto rovnici vykrátíme pěti. Po této ekvivalentní úpravě dostaneme rovnici $4d+p = 15$, kterou v $\mathbb{Z}^2$ rychle vyřešíme tak, že z ní vyjádříme neznámou p. Platí $p = 15-4d$, takže

   $$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[d; 15-4d]\,,\ \text{kde } d \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ .$$

   Vzhledem k tomu, že uvažovanou rovnici potřebujeme řešit v $\mathbb{N}_0^2$, výpočet tímto zjištěním nekončí. Zadání budou vyhovovat jen taková z právě uvedených řešení v $\mathbb{Z}^2$, která mají obě své složky nezáporné, tedy pro něž

   $$d \geq 0 \qquad \text{a} \qquad 15-4d \geq 0\,.$$

   Ze druhé z těchto podmínek vyplývá $d \leq \frac{15}{4}$. Oběma zmíněným podmínkám tedy vyhoví právě $d \in \{0; 1; 2; 3\}$. Úloha tedy má v $\mathbb{N}_0^2$ jen konečný počet řešení, a to právě čtyři

   $$K_{\mathbb{N}_0^2} = \{[0; 15]\,, [1; 11]\,, [2; 7]\,, [3; 3]\}\ ,$$

   což znamená, že částku 75 korun lze požadovaným způsobem uhradit čtyřmi způsoby, které zapíšeme do přehledné tabulky

počet dvacetikorun	0	1	2	3
počet pětikorun	15	11	7	3

   .

2. Vyřešte v $\mathbb{Z}^2$ i v $\mathbb{N}^2$ rovnici $12x - 7y = 15$.

   Řešení. Podívejme se nejprve, zda má tato rovnice řešení. Užitím uvedeného kritéria rychle zjistíme, že ano, neboť $(12, |-7|) = 1$ a $1 \mid -15$. Protože $12 > |-7|$, vydělíme nejprve zadanou rovnici sedmi. Platí pro ni

   $$\frac{12}{7}x - y = \frac{15}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x - \frac{2}{7}x - y = 2 + \frac{1}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x - y - 2 = \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}\,.$$

   Označme $a = 2x - y - 2$. Zřejmě je $a \in \mathbb{Z}$. Po této substituci na levé straně rovnice dostáváme

   $$a = \frac{2}{7}x + \frac{1}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad 7a = 2x+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{7}{2}a = x + \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3a - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a\,.$$

V předchozím kroku užitý obrat použijeme znovu. Tentokrát označme $b = 3a - x$. Opět je klíčová evidentní skutečnost, že $b \in \mathbb{Z}$. Po provedení uvedené substituce vychází

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \qquad \Leftrightarrow \qquad 2b = 1 - a \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 1 - 2b\,.$$

Nyní se budeme dosud uvedeným výpočtem „vracet zpět“, abychom pomocí $b \in \mathbb{Z}$ vyjádřili hledané neznámé x a y. Platí

$$b = 3a - x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3a - b = 3\,(1 - 2b) - b = 3 - 7b$$

a

$$\frac{12}{7}x - y = \frac{15}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{12}{7}x - \frac{15}{7} = \frac{12}{7} \cdot (3 - 7b) - \frac{15}{7} = 3 - 12b\,,$$

takže

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[3 - 7b; 3 - 12b]\,,\ \text{kde } b \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ .$$

Zbývá vyřešit zadanou rovnici ještě v $\mathbb{N}^2$. K tomu je třeba najít podmínky pro b tak, aby

$$3 - 7b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{7} > b \qquad \text{a současně} \qquad 3 - 12b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{12} = \frac{1}{4} > b\,.$$

Zjišťujeme tak, že je nutné a stačí, aby $b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_0^-$, proto

$$K_{\mathbb{N}^2} = \left\{[3 - 7b; 3 - 12b]\,,\ \text{kde } b \in \mathbb{Z}_0^- \text{ je libovolné}\right\}\ .$$

3. Najděte všechna $a \in \mathbb{R}$, pro něž platí

$$\frac{a + 65}{14} \in \mathbb{N} \qquad \text{a současně} \qquad \frac{22 - a}{9} \in \mathbb{N}\,.$$

Řešení. Informace, že $a \in \mathbb{R}$ by na první pohled mohla vyvolat mylný dojem, že tentokrát se o řešení LDR jednat nebude. Podstatné je, že hodnoty obou zadaných výrazů mají být přirozenými čísly. Proto existují $x \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{N}$ taková, že

$$x = \frac{a + 65}{14} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{22 - a}{9}\,.$$

Z uvedených dvou rovnic potřebujeme eliminovat neznámou a, u níž nás „ruší“ zadaný údaj, že $a \in \mathbb{R}$. Platí

$$x = \frac{a + 65}{14} \quad \Leftrightarrow \quad 14x - 65 = a \qquad \text{a} \qquad y = \frac{22 - a}{9} \quad \Leftrightarrow \quad 9y = 22 - a \quad \Leftrightarrow \quad a = 22 - 9y\,.$$

Odtud jednak plyne, že dokonce $a \in \mathbb{Z}$ a dále, že má platit rovnice

$$14x - 65 = 22 - 9y \qquad \Leftrightarrow \qquad 14x + 9y = 87\,,$$

což je „standardní“ LDR, kterou máme vyřešit v $\mathbb{N}^2$, což provedeme používaným algoritmem. Nejprve ji vydělíme devíti. Dostáváme tak

$$\frac{14}{9}x + y = \frac{87}{9} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x - \frac{4}{9}x + y = 10 - \frac{3}{9} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x + y - 10 = \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}\,.$$

Označme $k = 2x + y - 10$. Odtud plyne, že $k \in \mathbb{Z}$ a

$$k = \frac{4}{9}x - \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 9k = 4x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{4}k = x - \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2k + \frac{1}{4}k = x - \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}k + \frac{3}{4} = x - 2k\,.$$

Nyní položme $b = x - 2k$, takže $b \in \mathbb{Z}$ a

$$\frac{1}{4}k + \frac{3}{4} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad k + 3 = 4b \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 4b - 3\,.$$

Nyní se potřebujeme vrátit k původním proměnným. Zpětným dosazováním vypočteme

$$\frac{9}{4}k = x - \frac{3}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{9}{4}k + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}(4b-3) + \frac{3}{4} = 9b - 6$$

a

$$\frac{14}{9}x + y = \frac{87}{9} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{87}{9} - \frac{14}{9}x = \frac{87}{9} - \frac{14}{9}(9b-6) = 19 - 14b\,.$$

Protože rovnici $14x + 9y = 87$ řešíme v $\mathbb{N}^2$, potřebujeme dále vědět, pro jaká $b \in \mathbb{Z}$ je $x > 0$ a $y > 0$. Tedy

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9b - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b > \frac{2}{3} \qquad \text{a současně} \qquad y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 19 - 14b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{19}{14} > b\,,$$

takže jedinou vyhovující hodnotou je $b = 1$. Znamená to, že $x = 3$ (a $y = 5$). Druhá hodnota je v závorce, protože ji pro požadovaný výpočet a vlastně vůbec nepotřebujeme určovat. Tuto hodnotu můžeme vypočítat i bez znalosti y, a to z rovnice

$$x = \frac{a + 65}{14} \qquad \Leftrightarrow \qquad 14x = a + 65 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 14x - 65 = 14 \cdot 3 - 65 = -23\,.$$

Numerickou správnost výpočtu můžeme také zkontrolovat výpočtem

$$y = \frac{22 - a}{9} \qquad \Leftrightarrow \qquad 9y = 22 - a \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 22 - 9y = 22 - 9 \cdot 5 = -23\,,$$

ke kterému zase naopak nepotřebujeme znát x. Zadaná úloha má tedy právě jedno řešení. Jedinou vyhovující hodnotou je $a = -23$.

Jak jsme v úvodu textu slíbili, pomocí uvedených úloh jsme se přesvědčili, že LDR může v $\mathbb{N}^2$ co do počtu řešení dopadnout všemi teoreticky možnými variantami. Viděli jsme, že nemusí mít žádné řešení, může jich mít konečný počet (a to jedno či více) nebo dokonce nekonečně mnoho. Další úlohy k procvičení nabízí následující sada.

Zadání úloh.

1. Kolika způsoby lze zaplatit částku 97 korun výhradně pomocí dvoukorun nebo pětikorun?
2. Vyřešte v $\mathbb{Z}^2$ i v $\mathbb{N}^2$ rovnice

   a)
   $$5x - 13y = 2\,,$$

   b)
   $$287x + 266y = 8\,761\,,$$

   c)
   $$17x + 15y = 2\,,$$

   d)
   $$15x - 21y = 30\,,$$

e)

$$18x + 13y = 3\,681\,.$$

3. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí

$$\frac{x-7}{3} \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{a současně} \qquad \frac{x-3}{7} \in \mathbb{N}_0\,.$$

4. Na přehradě se uskutečnila přehlídka člunů. Zúčastnilo se jí 288 rekreantů. Čluny byly pro 17 nebo 19 osob. Kolik člunů každého typu bylo použito?

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. Zadání odpovídá rovnice $2d + 5p = 97$, kterou máme řešit v $\mathbb{N}_0^2$. Vychází

$$K_{\mathbb{N}_0^2} = \{[1 + 5t; 19 - 2t]\,,\ \text{kde } t \in \mathbb{Z},\ 0 \le t \le 9\}\ ,$$

úloha má tedy právě 10 řešení, která lze zapsat například tabulkou

počet dvoukorun	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46
počet pětikorun	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

.

2. a)

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[3 + 13r; 1 + 5r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ ,$$
$$K_{\mathbb{N}^2} = \{[3 + 13r; 1 + 5r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{N}_0 \text{ je libovolné}\}\ .$$

b) Protože $(287, 266) = 7$ a $7 \nmid 8\,761$, je

$$K_{\mathbb{Z}^2} = K_{\mathbb{N}^2} = \emptyset\,.$$

c)

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[1 + 15r; -1 - 17r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ ,\ K_{\mathbb{N}^2} = \emptyset\,,$$

d)

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[2 + 7r; 5r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ ,$$
$$K_{\mathbb{N}^2} = \{[2 + 7r; 5r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{N} \text{ je libovolné}\}\ ,$$

e)

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[-10 + 13r; 297 - 18r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ ,$$
$$K_{\mathbb{N}^2} = \{[-10 + 13r; 297 - 18r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{N},\ r \le 16 \text{ je libovolné}\}\ .$$

3. Označíme-li $a = \frac{x-7}{3}$ a $b = \frac{x-3}{7}$, odvodíme, že je potřeba vyřešit rovnici $7b - 3a = 4$, a to v $\mathbb{N}_0^2$. Vychází

$$K_{\mathbb{N}_0^2} = \{[1 + 7r; 1 + 3r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{N}_0 \text{ je libovolné}\}\ ,$$

odtud pak dostaneme $x = 10 + 21r$, kde $r \in \mathbb{N}_0$.

4. Zadání odpovídá rovnice $17x + 19y = 288$, kterou máme řešit v $\mathbb{N}_0^2$. Vychází

$$K_{\mathbb{Z}^2} = \{[8 - 19r; 8 + 17r]\,,\ \text{kde } r \in \mathbb{Z} \text{ je libovolné}\}\ ,$$

takže pro řešení v $\mathbb{N}_0^2$ musí platit $r = 0$, tedy $K_{\mathbb{N}_0^2} = \{[8; 8]\}$. Použito bylo 8 člunů každého druhu. Úloha má jediné řešení.