Objem a povrch kostky

Tento materiál je určen pro studenty 3. ročníku střední školy. Náročnější a hlavně komplexnější úloha na výpočty objemů a povrchů základních těles může posloužit nejen k opakování, ale hlavně k ověření, zda student umí nad danou problematikou uvažovat, nejen používat samostatné vzorce.

Příklady vytvořil pro potřeby M-kroužku: Mgr. Jakub Juránek, Ph.D.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Objem a povrch kostky – zadání

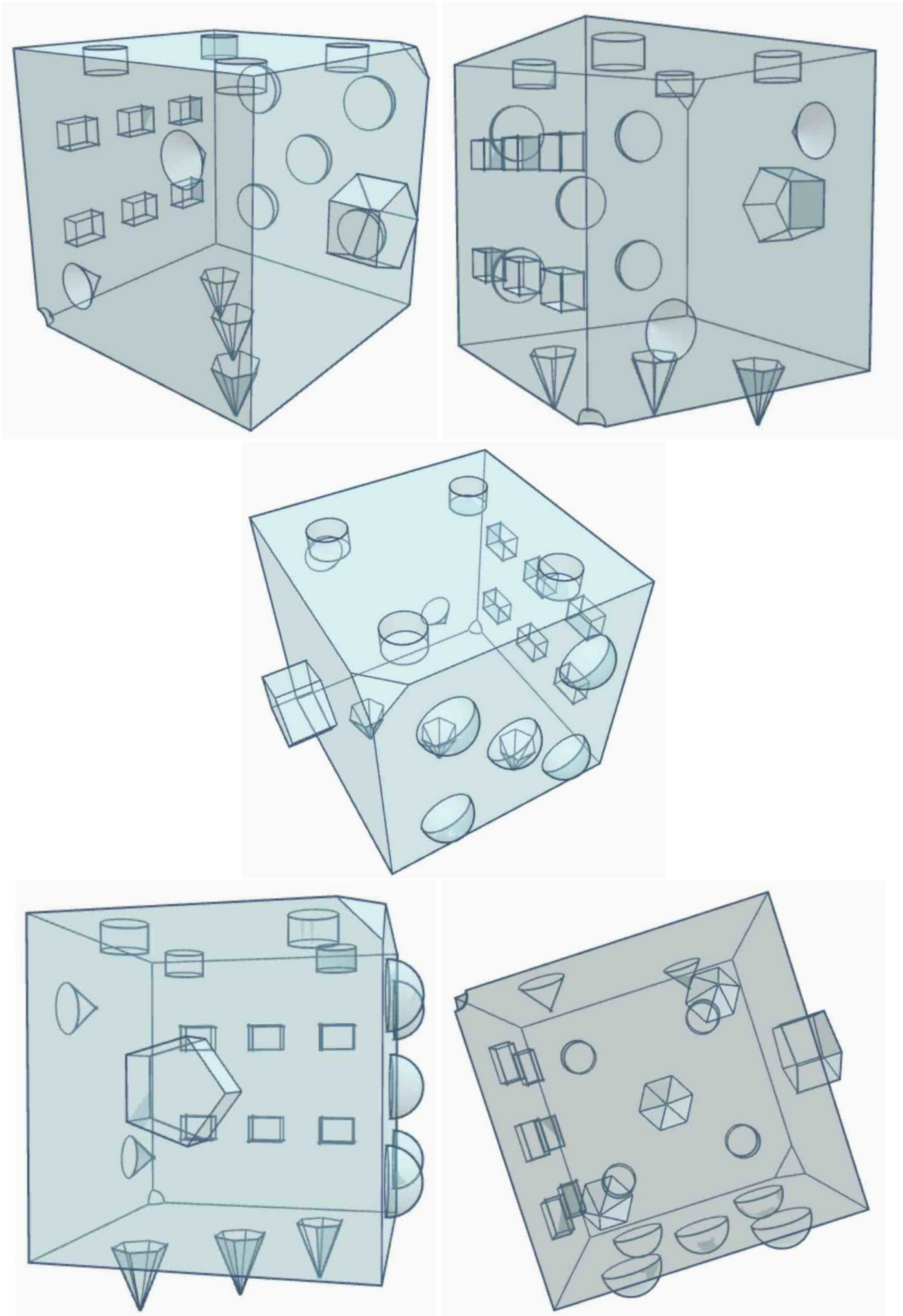
Hrací kostka má tvar krychle o hraně délky 60 cm, přičemž na jednotlivých stěnách jsou „puntíky“ tvořeny vystouplými či „vykousnutými“ tělesy tak, že jejich podstavné stěny splývají se stěnami krychle. Konkrétně jsou jednotlivá čísla znázorněna pomocí následujících:

1. vystupující pravidelný pětiboký hranol o podstavné hraně délky 10 cm a výšce 10 cm,
2. vykousnuté kužele o poloměru podstavy 5 cm a výšce 6 cm,
3. vystupující pravidelné šestiboké jehlany o podstavné hraně délky 5 cm a boční hraně délky 13 cm,
4. vykousnuté válce o průměru podstavy 9 cm a výšce 5 cm,
5. vystupující polokoule o poloměru 6 cm,
6. vykousnuté kvádry o podstavných hranách délek 8 cm a 6 cm a výšce 4 cm.

Dále byly kostce ukrojeny dva protější rohy, jeden rovinou protínající hrany v místech ve vzdálenostech 7 cm od prvního původního vrcholu, druhý kulovou plochou, jejíž střed je v místě druhého původního vrcholu a poloměr má 6 cm.

Určete objem a povrch této kostky.

3D modely kostky vytvořené jedním ze studentů.



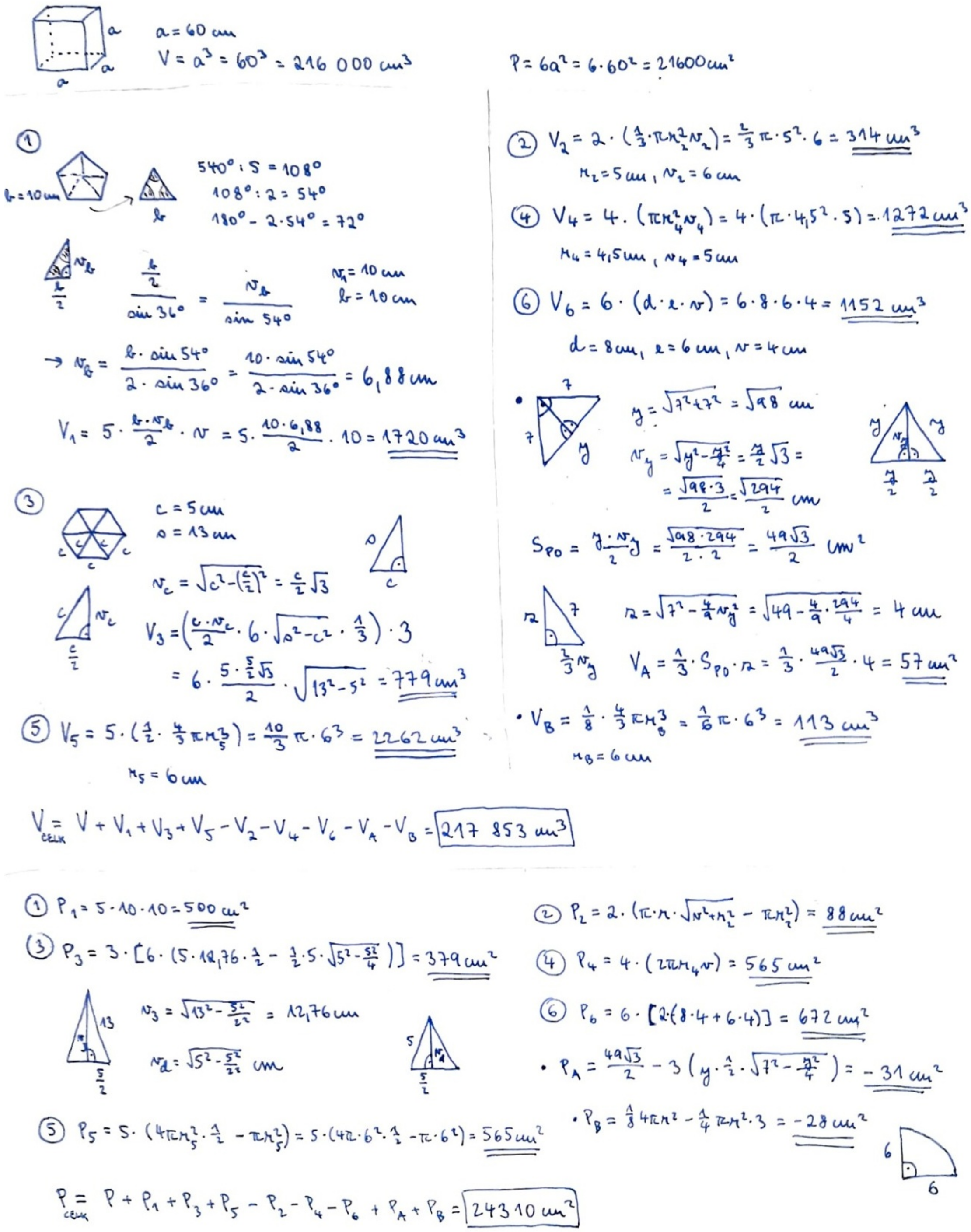
Komentář a řešení

Nakreslit si celou kostku je náročnější, proto doporučuji s tím studenty netrápit. Je vhodné začít ale návodnými otázkami typu „Jak poznáme, že ty polokoule značí, že zrovna padla pětka? Je jich tam pět!“, neb to někteří snadno přehlédnou. Pokud se podaří, můžeme ukázat studentům 3D modely (viz předchozí strana).

Dále se dá pokračovat s tím, jaký je rozdíl mezi vystupujícím a vykousnutým tělesem vzhledem k objemu kostky – jedno jej zvětšuje, druhé zmenšuje. Téže, jak rozdílně se projeví hranoly a válce oproti jehlanům, kuželům či polokoulím vzhledem k povrchu kostky – obojí ho zvětšuje o svůj plášť, ale druhá skupina na úkor své podstavy (zatímco první tu podstavu zachová, jen posune).

S tímto se můžeme, krok po kroku, číslo po čísle, pustit se studenty do řešení.

Přikládám ofocené řešení jednoho ze studentů.



$a = 60\ cm$

$V = a^3 = 60^3 = 216\,000\ cm^3$

$P = 6a^2 = 6 \cdot 60^2 = 21600\ cm^2$

① $b = 10\ cm$

$540° : 5 = 108°$

$108° : 2 = 54°$

$180° - 2 \cdot 54° = 72°$

$\dfrac{\frac{b}{2}}{\sin 36°} = \dfrac{v_b}{\sin 54°}$ $\quad v_1 = 10\ cm,\ b = 10\ cm$

$\to v_b = \dfrac{b \cdot \sin 54°}{2 \cdot \sin 36°} = \dfrac{10 \cdot \sin 54°}{2 \cdot \sin 36°} = 6{,}88\ cm$

$V_1 = 5 \cdot \dfrac{b \cdot v_b}{2} \cdot v = 5 \cdot \dfrac{10 \cdot 6{,}88}{2} \cdot 10 = 1720\ cm^3$

③ $c = 5\ cm$, $s = 13\ cm$

$v_c = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c}{2}\sqrt{3}$

$V_3 = \left(\dfrac{c \cdot v_c}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{s^2 - c^2} \cdot \dfrac{1}{3}\right) \cdot 3 = 6 \cdot \dfrac{5 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{13^2 - 5^2} = 779\ cm^3$

⑤ $V_5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r_5^3\right) = \frac{10}{3}\pi \cdot 6^3 = 2262\ cm^3$

$r_5 = 6\ cm$

② $V_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi r_2^2 v_2\right) = \frac{2}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 314\ cm^3$

$r_2 = 5\ cm,\ v_2 = 6\ cm$

④ $V_4 = 4 \cdot (\pi r_4^2 v_4) = 4 \cdot (\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 5) = 1272\ cm^3$

$r_4 = 4{,}5\ cm,\ v_4 = 5\ cm$

⑥ $V_6 = 6 \cdot (d \cdot e \cdot v) = 6 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 1152\ cm^3$

$d = 8\ cm,\ e = 6\ cm,\ v = 4\ cm$

• $y = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98}\ cm$

$v_y = \sqrt{y^2 - \frac{y^2}{4}} = \frac{y}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{98 \cdot 3}}{2} = \frac{\sqrt{294}}{2}\ cm$

$S_{PO} = \dfrac{y \cdot v_y}{2} = \dfrac{\sqrt{98 \cdot 294}}{2 \cdot 2} = \dfrac{49\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

$h = \sqrt{7^2 - \frac{4}{9}v_y^2} = \sqrt{49 - \frac{4}{9} \cdot \frac{294}{4}} = 4\ cm$

$V_A = \frac{1}{3} \cdot S_{PO} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{49\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 57\ cm^3$

• $V_B = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi r_B^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot 6^3 = 113\ cm^3$

$r_B = 6\ cm$

$V_{celk} = V + V_1 + V_3 + V_5 - V_2 - V_4 - V_6 - V_A - V_B = \boxed{217\,853\ cm^3}$

① $P_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500\ cm^2$

③ $P_3 = 3 \cdot \left[6 \cdot \left(5 \cdot 12{,}76 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{5^2 - \frac{5^2}{4}}\right)\right] = 379\ cm^2$

$v_3 = \sqrt{13^2 - \frac{5^2}{2^2}} = 12{,}76\ cm$

$v_d = \sqrt{5^2 - \frac{5^2}{2^2}}\ cm$

⑤ $P_5 = 5 \cdot \left(4\pi r_5^2 \cdot \frac{1}{2} - \pi r_5^2\right) = 5 \cdot \left(4\pi \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{2} - \pi \cdot 6^2\right) = 565\ cm^2$

② $P_2 = 2 \cdot \left(\pi \cdot r \cdot \sqrt{v^2 + r_2^2} - \pi r_2^2\right) = 88\ cm^2$

④ $P_4 = 4 \cdot (2\pi r_4 v) = 565\ cm^2$

⑥ $P_6 = 6 \cdot [2 \cdot (8 \cdot 4 + 6 \cdot 4)] = 672\ cm^2$

• $P_A = \frac{49\sqrt{3}}{2} - 3\left(y \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7^2 - \frac{7^2}{4}}\right) = -31\ cm^2$

• $P_B = \frac{1}{8}4\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 \cdot 3 = -28\ cm^2$

$P_{celk} = P + P_1 + P_3 + P_5 - P_2 - P_4 - P_6 + P_A + P_B = \boxed{24310\ cm^2}$