Matematika a sudoku

Naďa Horáková

Klíčová aktivita „Podpora gramotností“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Anotace

Tento materiál se zabývá matematikou za Sudoku a jeho menší variantou (velikosti 4 x 4) Shidoku. Text je rozdělen do několika částí: pravidla a historie Sudoku, základní pojmy z kombinatoriky, které studenti následně použijí ve zjišťování všech vyplněných Shidoku a Sudoku mřížek. Poslední kapitola obsahuje řešení úloh.

Celý výpočet počtu všech vyplněných mřížek je v rámci kapitoly Shidoku rozdělen do několika podúloh, které student může řešit sám a svá řešení si může zkontrolovat v poslední kapitole. Následně se může seznámit také se symetriemi Shidoku mřížek. V kapitole Sudoku je uveden nástin výpočtu. I přesto, že je výpočet složitý a byl k němu použit počítačový program, i zde může některé jednoduché úlohy řešit student sám.

Materiál je vhodný pro studenty SŠ (nebo šikovné studenty ZŠ), kteří si díky němu mohou procvičit základní znalosti kombinatoriky.

Obsah

1 Hra Sudoku, její pravidla, historie a souvislost s matematikou

1.1 Pravidla Sudoku

Převzato z `https://cs.wikipedia.org/wiki/Sudoku`:

> Cílem hry v základní podobě je doplnit chybějící cifry 1 až 9 v zadané, zčásti vyplněné čtvercové tabulce s 9 × 9 poli. V tabulce jsou zvýrazněny příčky vymezující 9 čtverců (3 × 3). K předem vyplněným číslicím je třeba doplnit další číslice tak, aby platilo, že v každém řádku, v každém sloupci a v každém z devíti dílčích čtverců jsou použity vždy všechny číslice jedna až devět, každá právě jednou. Aritmetická hodnota číslic pro řešení nemá význam, jde pouze o výběr logické řady devíti znaků (v zásadě je možné hrát Sudoku i např. s písmeny A–I nebo jakoukoli jinou skupinou devíti symbolů).

Kromě této základní podoby hry Sudoku se objevují i její další verze, např. Shidoku, ve kterém má tabulka velikost 4 x 4.

1.2 Historie Sudoku

První zmínka o Sudoku pochází pravděpodobně z newyorského časopisu Pencil Puzzles and Word Games. V roce 1979 byla v tomto časopise vydána logická hra s čísly nazvaná „Number Place“, v níž hráči museli umístit čísla 1–9 do mřížky 9 x 9, aniž by se opakovala jakákoli číslice ve sloupci, v řádku a v dílčím čtverci.

Za autora „Number Place“ je považován Howard Garns, architekt v důchodu a vynálezce hlavolamů na volné noze z Indianapolis.

Tato hra se stávala velmi oblíbenou, avšak rozšíření po celém světě se dočkala až v momentě, kdy si jí všimlo Japonsko.

V roce 1984 se Sudoku dostalo do Japonska prostřednictvím měsíčníku Nikolist. Hra vydaná pod názvem „Suuji wa dokushin ni kaguru“ (Čísla, která musí zůstat osamocena) se řídila stejnými principy jako hra z newyorského časopisu, ale byla do ní přidána dvě nová pravidla.

Prvním pravidlem bylo to, že číslice v zadání by měla vytvářet různé obrazce, aby byla hra pro veřejnost vizuálně přitažlivější. Druhým pravidlem pak bylo, že v zadání nesmí být více než 32 z celkových 81 číslic. Tato hranice zaručovala, že hra bude dostatečně náročná i při snadné obtížnosti.

Hra zaznamenala v Japonsku obrovský úspěch a rychle se rozšířila. Díky její popularitě byl zkrácen i její název na Sudoku (Su = číslo, Doku = sám).

Z Japonska se poté hra rozšířila po celém světě.

1.3 Matematika v Sudoku

Sudoku v podstatě není matematickou hrou. Jak už bylo zmíněno výše, místo doplňování číslic 1–9 bychom mohli doplňovat libovolnou jinou skupinu devíti různých znaků. Nicméně to neznamená, že v Sudoku žádnou matematiku nenajdeme. Nás bude zajímat počet všech platných (tj. pravidla splňujících) vyplněných Sudoku mřížek, kde využijeme základní znalosti kombinatoriky. Další matematické téma, které se týká Sudoku a my jej lehce nakousneme, je například teorie grup, pomocí které můžeme zkoumat ekvivalence („stejnost“) dvou Sudoku mřížek nebo třeba teorie grafů, která nám může pomoci při řešení Sudoku.

2 Pojmy z kombinatoriky

V této kapitole si jen v rychlosti zopakujeme základní kombinatorické pojmy, které využijeme dále při počítání všech platných Sudoku mřížek.

2.1 Kombinatorické pravidlo součinu

Definice 2.1: Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \quad n_2 \qquad n_k$.

Úloha 2.1: Kolik různých uspořádaných trojic čísel můžeme dostat, když třikrát hodíme hrací kostkou?

2.2 Kombinatorické pravidlo součtu

Definice 2.2: Jsou-li A_1, A_2, ..., A_n konečné po dvou disjunktní množiny, které mají po řadě p_1, p_2, ..., p_n prvků, pak počet prvků množiny A_1 [A_2 [$\dots A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \quad + p_n$.

Úloha 2.2: Turista plánuje výlet. Autobusem může jet buď do města A, odkud vedou tři stezky, nebo do města B, odkud vedou dvě stezky. Kolik tras má na výběr?

2.3 Variace

Definice 2.3: k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Úloha 2.3: Kolik existuje tříciferných čísel, v nichž jsou pouze cifry 1–6, z nichž každá nejvýše jednou?

2.4 Permutace

Definice 2.4: Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.
Tj. permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Počet $P(n)$ všech permutací z n prvků je

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Úloha 2.4: Kolika způsoby můžeme postavit čtyři osoby do řady?

2.5 Kombinace

Definice 2.5: k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet $K(k,n)$ všech k-členných kombinací z n prvků je

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Úloha 2.5: Ve třídě je 20 žáků. Kolika způsoby z nich lze vybrat dva zástupce?

3 Shidoku

Shidoku (na obr. 3.1 vidíme Shidoku i se souřadnicemi políček, pomocí kterých se budeme později na políčka odkazovat) je varianta Sudoku, ve které má mřížka místo velikosti 9 x 9 velikost pouze 4 x 4, doplňují se do ní tedy číslice 1–4, pravidla zůstávají stejná.

Pro naši další práci si ještě vytvoříme „názvosloví“:

- **blok**: podčtverec o rozměru 2x2 ohraničený silnější čarou, označíme je B1–B4 takto: v obr. 3.1: blok B1 obsahuje číslici 1, blok B2 číslici 2 atd.,
- **pás**: sousední dvojice bloků,
- **stoh**: dvojice bloků, které jsou na „sobě“.

	a	*b*	*c*	*d*
1		1		2
2				
3	3			4
4				

Obr. 3.1: Shidoku

3.1 Počet všech platných Shidoku mřížek

Nyní tedy spočteme počet všech platných Shidoku mřížek, přičemž tento úkol rozdělíme do několika podúloh.

Úloha 3.1: Kolika způsoby můžeme do prvního bloku B1 vložit číslice 1–4?

Předpokládejme nyní, že první blok vypadá tak, jako na obr. 3.2 a pokračujme s výpočtem dál.

1	2
3	4

Obr. 3.2: Blok B1

Úloha 3.2: Kolika způsoby lze doplnit první řádek Sudoku mřížky, aby byla platná?

Předpokládejme, že jsme číslice 3 a 4 vložili v tomto pořadí.

Úloha 3.3: Kolika způsoby můžeme doplnit první sloupec?

Budeme předpokládat, že ve třetím řádku prvního sloupce je číslo 2 a ve čtvrtém řádku číslo 4. Naši částečně vyplněnou mřížku vidíte na obrázku 3.3.

1	2	3	4
3	4	1	2
2			
4			

Obr. 3.3: Částečně vyplněná mřížka

Úloha 3.4: Doplňte do mřížky jednoznačně určené číslice.

Úloha 3.5: Kdybychom v tento moment doplnili libovolnou vhodnou číslici do jednoho určitého políčka, byla by ostatní políčka určena jednoznačně. O které políčko se jedná?

Úloha 3.6: Vzhledem k řešení předchozích úloh, kolik existuje způsobů doplnění Shidoku?

3.2 Symetrie Shidoku mřížek

V této části se budeme zabývat vztahy mezi jednotlivými platnými Shidoku mřížkami. Uvažujme například následující dvě mřížky:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

2	3	4	1
4	1	2	3
3	2	1	4
1	4	3	2

Mezi těmito mřížkami existuje nějaký vztah. Přijdete na něj?

Druhá mřížka vznikla z té první tak, že jsme číslici 1 nahradili číslicí 2, číslici 2 číslicí 3, 3 ! 4 a 4 ! 1. Tím jsme obdrželi sice jinou, ale stále platnou mřížku.

Úloha 3.7: Zkusme nyní jinou úpravu – otočme první z mřížek výše o 90 po směru hodinových ručiček. Zůstala platnost mřížky zachována?

Úpravy mřížky, která nemění její platnost, nazveme **symetrií** mřížky.

Úloha 3.8: Zkuste vymyslet další symetrie Shidoku mřížky, tj. úpravy, které z jedné platné mřížky vytvoří další.

Takových symetrií je vlastně mnoho (ale konečně mnoho), jelikož na jednu mřížku můžeme „poštvat“ jednu symetrii a poté další, čímž vznikne další symetrie mřížky. Takové „kombinování“ symetrií se nazývá **skládání** symetrií. My si tu vypíšeme „základní“ symetrie, které lze skládat.

1. Přeznačení čísel (např. 2 ! 4, 4 ! 3, 3 ! 1, 1 ! 2),
2. prohození dvojice bloků B1 a B2 s dvojicí B3 a B4 (při zachování pořadí bloků),
3. prohození dvojice bloků B1 a B3 s dvojicí B2 a B4 (při zachování pořadí bloků),
4. prohození prvního a druhého sloupce,
5. prohození třetího a čtvrtého sloupce,
6. prohození prvního a druhého řádku,
7. prohození třetího a čtvrtého řádku,
8. symetrie čtverce[1].

Úloha 3.9: Odůvodněte, proč není symetrií mřížky například prohození prvního a třetího řádku.

Pokud nějakou mřížku A upravíme jednou symetrií nebo složením několika symetrií na mřížku B, tak řekneme, že tyto mřížky jsou **ekvivalentní**.

Například následující tři mřížky jsou ekvivalentní.

[1] Symetrie čtverce jsou následující: (a) Otočení o 0° (identita), (b) otočení o 90°, (c) otočení o 180°, (d) otočení 270°, (e) osová souměrnost s horizontální osou vedoucí středem čtverce, (f) osová souměrnost s vertikální osou vedoucí středem čtverce, (g) osová souměrnost s osou, která je diagonálou čtverce z levého dolního do pravého horního rohu, (h) osová souměrnost s osou, která je diagonálou čtverce z levého horního do pravého dolního rohu.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4

2	3	4	1
4	1	2	3
3	2	1	4
1	4	3	2

Všech 288 platných Shidoku mřížek lze rozdělit do několika disjunktních množin, ve kterých budou vzájemně ekvivalentní mřížky. Nabízí se tedy otázka, kolik takových množin existuje.

Úloha 3.10: Víme, že jednou ze symetrií mřížky je i přeznačení číslic. Kolik takových symetrií existuje?

Pokud tedy víme, že libovolnou mřížku lze přeznačit 24 způsoby, tak je zřejmé, že 288 mřížek lze rozdělit do nejvýše $\frac{288}{24} = 12$ disjunktních množin se vzájemně ekvivalentními mřížkami. Stačí tedy dále uvažovat pouze 12 mřížek s blokem B1 na obr. 3.2 (každou z těchto mřížek můžeme totiž přeznačit 24 způsoby).

Těchto 12 mřížek si můžeme vypsat[2] a podívat se, zda nejsou některé mezi sebou ekvivalentní. Přijdeme na to, že existují nejvýše tři disjunktní množiny vzájemně ekvivalentních mřížek.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Obr. 3.4: Mřížka A

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Obr. 3.5: Mřížka B

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Obr. 3.6: Mřížka C

[2] Návodem pro vypsání těchto 12 mřížek může být postup výpočtu všech platných Shidoku mřížek.

Úloha 3.11: Mřížku B lze složením dvou symetrií upravit na mřížku C. Dokážete zjistit, o jaké symetrie se jedná?

Podíváme se, zda jsou mřížky A a B ekvivalentní. Aby se mřížka A stala mřížkou B, musely by se prohodit políčka c2 s d2 a c4 s d4. Pokud by taková úprava byla symetrií, pak by ji mělo být možné použít na libovolnou platnou mřížku a výsledkem by měla být validní mřížka. To ale například pro mřížku níže neplatí:

1	3	2	4
2	4	1	3
3	2	4	1
4	1	3	2

!

1	3	2	4
2	4	3	1
3	2	4	1
4	1	2	3

Tato úprava tedy symetrií není a mřížky A a B nejsou ekvivalentní. Tím pádem existují pouze dvě disjunktní množiny vzájemně ekvivalentních mřížek: s mřížkou A je ekvivalentních 24 4 = 96 mřížek, s mřížkou B je ekvivalentních 24 8 = 192 mřížek.

4 Sudoku

Sudoku mřížka je obdobně jako Shidoku rozdělena do devíti bloků B1–B9. **Pás** je trojice vedle sebe ležících bloků (např. B1–B3), **stoh** je trojice nad sebou ležících bloků (např. B1, B4 a B7).

Stejně jako u Shidoku se podíváme na výpočet počtu všech různých platných Sudoku mřížek. Tento výpočet, který použili v roce 2006 Bertram Falgenhauer a Frazer Jarvis, je však o poznání složitější a my jej rozhodně nebudeme provádět celý – jen si nastíníme jeho postup.

Úloha 4.1: Kolika způsoby můžeme vyplnit blok B1?

Úloha 4.2: Pokud tedy označíme počet všech platných Sudoku mřížek jako N a N_1 bude značit počet všech Sudoku mřížek s daným blokem B_1 na obr. 4.2, jaký bude mezi N a N_1 vztah?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Dále nás bude zajímat, kolika způsoby lze doplnit první řádek v blocích B2 a B3 s daným blokem B1.

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						

Úloha 4.3: Které číslice se mohou objevit v prvním řádku bloků B2 a B3?

Úloha 4.4: Kolik existuje možností pro doplnění číslic 4–9 do prvního řádku bloků B2 a B3?

Tyto kombinace si nyní rozdělíme:

- **ryzí horní řádky** – první řádek bloku B1 obsahuje číslice 4, 5, 6 a první řádek bloku

B2 obsahuje číslice 7, 8, 9 nebo naopak

- **smíšené horní řádky** – všechny ostatní případy

Úloha 4.5: Kolika způsoby lze doplnit horní pás s ryzím horním řádkem $(1, 2, 3)$; $\{4, 5, 6\}$; $\{7, 8, 9\}$[a]? Stále předpokládáme, že blok B1 je tvaru 4.2.

[a] $(1, 2, 3)$ značí uspořádanou trojici; $\{4, 5, 6\}$ neuspořádanou trojici, pořadí číslic není dané.

Nyní vypočteme, kolika způsoby lze doplnit horní pás se smíšeným horním řádkem $(1, 2, 3)$; $\{4, 6, 8\}$; $\{5, 7, 9\}$.

Úloha 4.6: Doplňte co největší počet jednoznačně určených číslic (až na pořadí) do daného horního pásu. (Stačí určit trojici políček, do které číslice patří.)

Zbylá místa označme písmeny a, b, c přičemž platí, že $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$.

Úloha 4.7: Kolika způsoby můžeme číslice 1, 2, 3 přiřadit písmenům a, b, c tak, aby Sudoku mřížka byla platná? Pořád mějme na paměti, že na pořadí číslic v jednotlivých trojicích (zatím) nezáleží.

Úloha 4.8: Kolika způsoby lze doplnit horní pás s daným smíšeným horním řádkem?

Pro zbylých 17 smíšených horních řádků by byl výpočet totožný.

Úloha 4.9: Kolika způsoby lze doplnit horní pás s daným blokem $B1$?

Konec výpočtu už je docela složitý, takže jen v rychlosti popíšeme jeho princip.

Namísto toho, aby Falgenhauer a Jarvis počítali, kolika způsoby můžeme každý z 2 612 736 horních pásů doplnit zbytek mřížky, rozhodli se tyto pásy rozdělit do jednotlivých disjunktních množin tak, že v každé skupině jsou mřížky s těmi horními pásy, které sdílejí počet možných doplnění celé mřížky.

Jak už víme z předchozí kapitoly, existují operace, které nemění platnost mřížky, říkáme jim **symetrie**.

Připomeneme, že mezi tyto symetrie patří například

- přeznačení číslic,
- permutování stohů/pásů,
- permutování sloupců v rámci stohu,
- permutování řádků v rámci pásu.

Pokud bychom tedy v horním pásu prohodili bloky B2 a B3, tak sice obdržíme jiný horní pás, ale bude mít stejný počet možností doplnění zbytku mřížky jako původní horní pás.

Falgenhauer a Jarvis použili mnoho metod, jak zjistit počet výše zmíněných disjunktních množin. Zjistili, že jich je 44, proto bude celkový počet mřížek Sudoku právě $\sum_{c=1}^{44} m_c \; n_c$, kde n_c značí počet způsobů, jakými lze jeden ze 44 pásů doplnit do plné mřížky, a m_c značí počet horních pásů, které sdílejí tento počet n_c doplnění mřížky.

Falgenhauer s Jarvisem napsali počítačový program, který provedl konečné výpočty. Vypočítali N_1 platných doplnění Sudoku mřížky s blokem B1 ve tvaru 4.2. Poté tento počet vynásobili číslem 9!, a tím získali odpověď. Zjistili, že počet všech platných Sudoku mřížek je $6,671 \; 10^{21}$.

5 Řešení úloh

5.1 Kombinatorické úlohy

Úloha 2.1: $6\ \ 6\ \ 6 = 216$ různých uspořádaných trojic

Úloha 2.2: Turista nemůže vystoupit na obou místech současně, tj. množiny stezek z měst A a B jsou disjunktní. Celkový počet stezek je tedy $4 + 2 = 6$.

Úloha 2.3: $6\ \ 5\ \ 4 = 120$ trojciferných čísel

Úloha 2.4: $4\ \ 3\ \ 2\ \ 1 = 4! = 24$ způsoby.

Úloha 2.5: $\binom{20}{2} = \frac{20\ 19}{2} = 190$ způsoby.

5.2 Shidoku

Úloha 3.1: Číslice 1–4 můžeme dosadit 4! způsoby. Číslice 1–4 totiž můžeme do políček a1, a2, b1, b2 přiřadit 4! způsoby (jedná se o permutace čtyř prvků).

Úloha 3.2: Dvěma způsoby. Do prvního řádku můžeme vložit už jen číslice 3 a 4, a to buď v tomto pořadí, nebo v pořadí opačném.

Úloha 3.3: Dvěma způsoby. Analogické vysvětlení jako u předchozí úlohy.

Úloha 3.4: Jednoznačně lze doplnit číslici 4 do políčka c3:

Úloha 3.5: Jedná se o políčko d4. Sami si vyzkoušejte, že doplněním například číslice 2 do políčka c2 nelze mřížku jednoznačně doplnit. Ať už ale do políčka d4 dosadíte libovolnou z číslic 1–3, vždy se vám podaří mřížku jednoznačně doplnit.

Úloha 3.6: Na výsledky z předchozích úloh použijeme pravidlo součinu, tj. celkem existuje $4!\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 3 = 288$ platných vyplněných Shidoku mřížek.

Úloha 3.7: Vidíme, že platnost mřížky zůstala neporušená.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

!

4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4

Úloha 3.9: Například u mřížky níže by došlo k porušení platnosti.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Úloha 3.10: Takových symetrií existuje $4! = 24$. Jedná se v podstatě o stejnou úlohu, jakou je Úloha 3.1.
Úloha 3.11:

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

!

1	3	2	4
2	4	1	3
3	2	4	1
4	1	3	2

!

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Jedná se o osovou souměrností s osou, která je diagonálou mřížky z horního levého do dolního pravého rohu a přeznačení 4 ! 4, 1 ! 1, 2 ! 3, 3 ! 2 (v tomto pořadí).

5.3 Sudoku

Úloha 4.1: Jedná se o permutace číslic 1–9, kterých je 9!.
Úloha 4.2: $N = 9!\ N_1$. 9! značí počet možných přeznačení, které můžeme aplikovat na libovolnou mřížku s daným blokem $B1$ na obr. 4.2.
Úloha 4.3: Pouze číslice 4–9.
Úloha 4.4: Jedná se o počet tříprvkových kombinací ze šesti prvků (když určíme trojici číslic do bloku B2, tak je trojice číslic do B3 určena jednoznačně), tedy $\binom{6}{3} = 20$.
Úloha 4.5: Pokud doplníme první řádek dle zadání, tak je umístění zbylých neuspořádaných trojic v B2 a B3 jednoznačně dané. Každou trojici v B2 a B3 můžeme permutovat, celkem tedy existuje $(3!)^6$ možností doplnění daného horního pásu.

1	2	3	f4	5	6g	f7	8	9g
4	5	6	f7	8	9g	f1	2	3g
7	8	9	f1	2	3g	f4	5	6g

Složené závorky značí, že uspořádání číslic není v dané trojici pevně dáno.

Stejný počet způsobů doplnění horního pásu má i druhý ryzí horní řádek.

Úloha 4.6:

1	2	3	f4	6	8g	f5	7	9g
4	5	6	f7	9	ag	f8	b	cg
7	8	9	f5	b	cg	f4	6	ag

Úloha 4.7: Pokud přiřadíme hodnotu písmenu a, pak je přiřazení hodnot písmenům b, c jednoznačně určeno. Počet možností přiřazení hodnoty písmenu a je 3.

Úloha 4.8:

1. Počet možností přiřazení hodnoty písmenu a: 3
2. Počet všech permutací jedné trojice číslic: 3!
3. Počet všech permutací šesti trojice číslic: $(3!)^6$

Celkem tedy $3\ \ (3!)^6$ způsobů.

Úloha 4.9: Použijeme pravidlo součinu a pravidlo součtu:

$$\underbrace{2\ \ (3!)^6}_{\text{pocet zpusobu pro ryz horn radky}} + \underbrace{18\ \ 3\ \ (3!)^6}_{\text{pocet zpusobu pro sm sene horn radky}} = 2\,612\,736$$