Pascalův trojúhelník & identity kombinačních čísel

Pro potřeby M-kroužku vytvořil: Mgr. Jan Herman

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost" je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Pascalův trojúhelník & identity kombinačních čísel

Pascalovým trojúhelníkem rozumíme nekonečné trojúhelníkové schéma čísel dle obrázku:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
⋮

Obrázek 1: Pascalův trojúhelník

Je ohraničeno jedničkami, každé další číslo je součtem dvou čísel nad ním.

Věta 1.
V n-tém řádku na k-té pozici (indexováno od 0) je kombinační číslo $\binom{n}{k}$ definované jako $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Důkaz:
Dokážeme indukcí vůči n. Na řádku 0 na pozici 0 je $1 = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\cdot(0-0)!}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n, dokážeme pro n+1. Zřejmě $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Pro libovolné ostatní $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ pak snadno dokážeme, že $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Je totiž

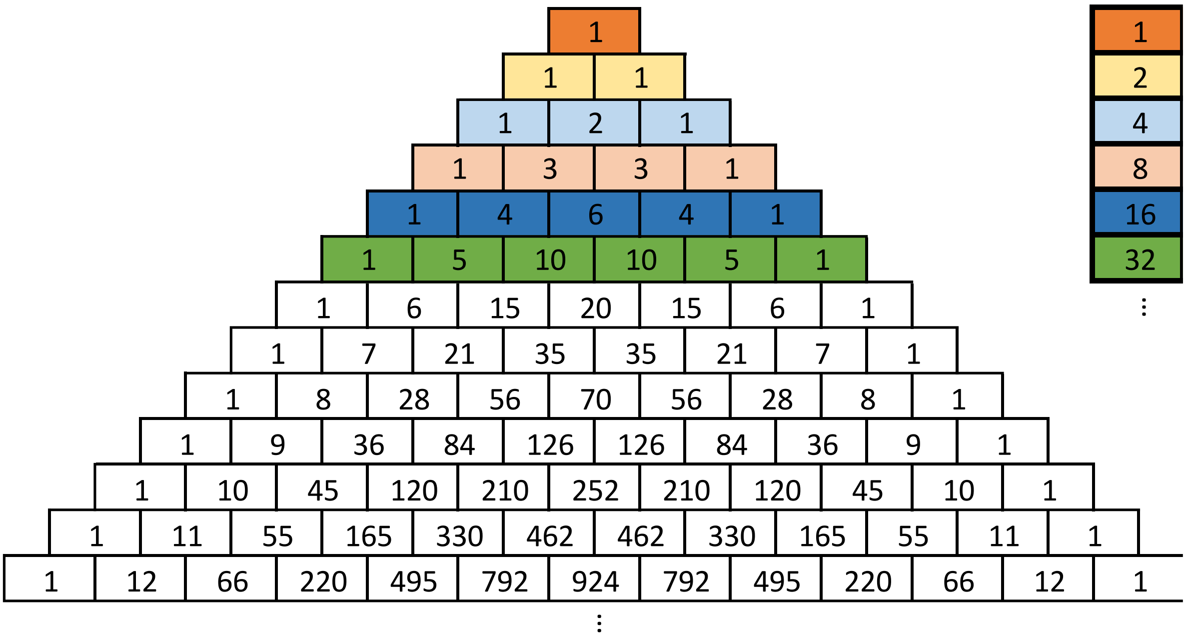
$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(k+1+n-k)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} =$$
$$= \frac{(k+1)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-k)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} =$$
$$= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Ilustrujme na obrázku:

Obrázek 2: Součet kombinačních čísel

Uvedené značení prvků kombinačními čísly budeme používat pro formulace příkladů. Řešit je ale budeme pomocí definičního vztahu pro Pascalův trojúhelník.

Zkoumáním Pascalova trojúhelníku můžeme objevit různé zajímavé identity pro kombinační čísla. Nejprve vždy ilustrujeme obrázkem a pak rigorózně vyřešíme.



Obrázek 3: Řádkové součty

Vidíme, že součty prvních šesti řádků odpovídají šesti mocninám dvou. Zformulujme hypotézu jako tvrzení a dokažme:

Příklad 1. (rozehřívací)
Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. Přeformulováno do řeči Pascalova trojúhelníku: Dokažte, že součet čísel v n-tém řádku Pascalova trojúhelníka (indexováno od nuly) je 2^n.

Řešení:
Dokažme matematickou indukcí. Tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Dále pro $n + 1$ máme

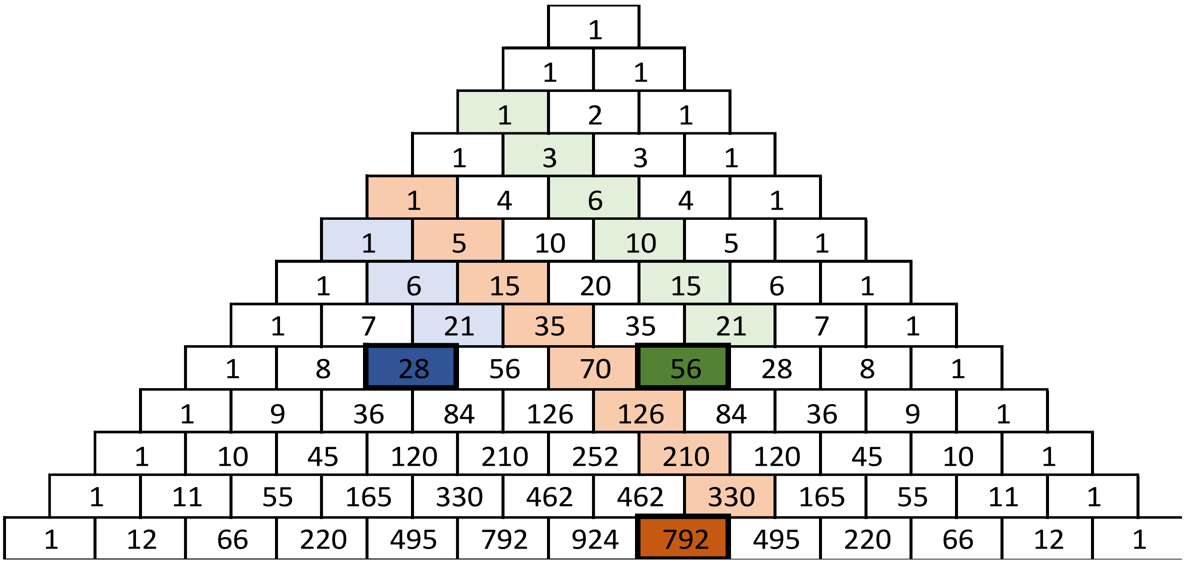
$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} + 1 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+1} + 1 =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right) + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k+1} + 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Poznámka:
Uvedené řešení je formální. Neformálně snadno nahlédneme, že každý řádek Pascalova trojúhelníku vznikne součtem dvou posunutých kopií řádku předešlého (když jednu kopii doplníme nulou zleva a druhou zprava). Tedy součet je dvojnásobkem součtu předchozího řádku.

Zkusme nyní sčítat prvky Pascalova trojúhelníku diagonálně:



Obrázek 4: Diagonální součty

Dle naznačených barevných polí můžeme vyslovit (a pečlivě zformulovat) hypotézu:

Příklad 2.
Dokažte, že pro libovolná $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$ platí: $\sum_{k=0}^{m} \binom{k+n}{k} = \binom{m+n+1}{m}$.

Řešení:
Dokažme opět matematickou indukcí, tentokrát vůči m. Pro $m = 0$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že platí pro dané m, dokažme pro $m + 1$. To je snadné:

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{k+n}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n}{k} + \binom{m+1+n}{m+1} =$$

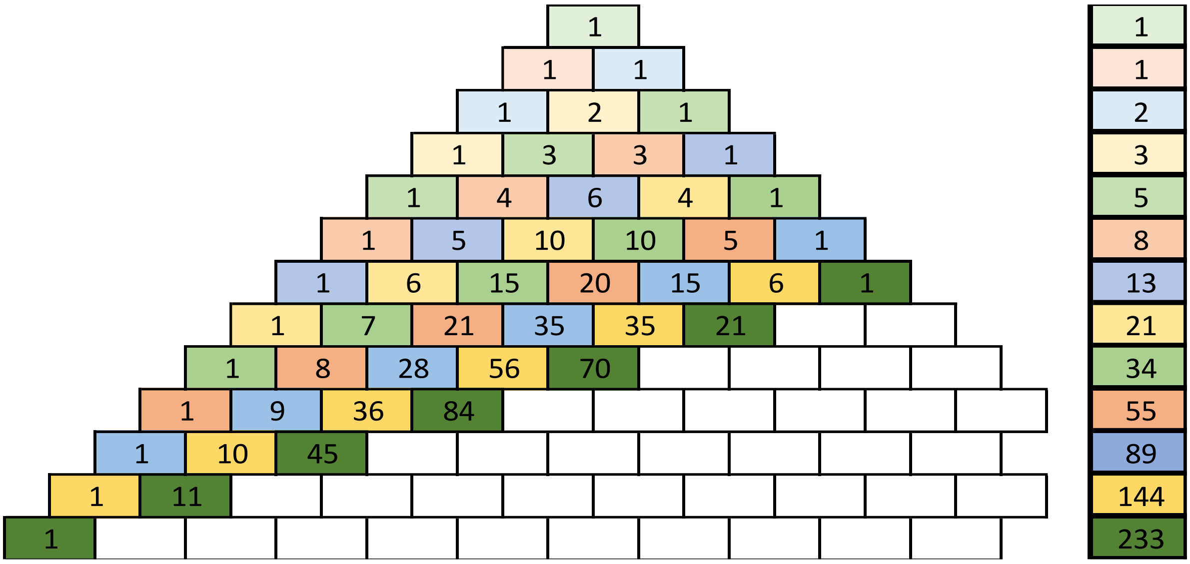
$$= \binom{m+n+1}{m} + \binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n+2}{m+1}.$$

Poznámka:
Vzhledem k symetrii Pascalova trojúhelníku lze rovnost z příkladu 2 zapsat jako $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{m+n+1}{n+1}$.

Opět je řešení zřejmé z Pascalova trojúhelníku. Při prodloužení součtu o 1 sčítanec leží tento poslední sčítanec napravo od předchozího součtu. Dle pravidel pro Pascalův trojúhelník čteme součet těchto dvou čísel v poli pod nimi.

Příklad 3.

Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ platí: $\sum_{k=0}^{2k\leq n}\binom{n-k}{k} = F_n$. Symbolem F_n rozumíme n-tý člen Fibonacciho posloupnosti definované $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.



Řešení:

Pro $n = 0$ máme $\sum_{k=0}^{2k\leq 0}\binom{0-k}{k} = \binom{0}{0} = 1 = F_0$. Pro $n = 1$ dostáváme podobnou kalkulací, že $\sum_{k=0}^{2k\leq 1}\binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} = 1 = F_1$. Dále tradičně postupujme matematickou indukcí. Je totiž:

$$\sum_{k=0}^{2k\leq n}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{2k\leq n}\binom{n-k}{k} \doteq \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{2k\leq n}\left(\binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right) =$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{2k\leq n}\binom{n-1-k}{k} + \sum_{l=0}^{2l\leq n-2}\binom{n-2-l}{l} =$$

$$= \binom{n-1}{0} + \sum_{k=1}^{2k\leq n-1}\binom{n-1-k}{k} + \sum_{l=0}^{2l\leq n-2}\binom{n-2-l}{l} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2k\leq n-1}\binom{n-1-k}{k} + \sum_{l=0}^{2l\leq n-2}\binom{n-2-l}{l} = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Poznamenejme, že při úpravě označené „$\doteq$“ jsme drobně podváděli. Pravá strana má smysl jen pro lichá n. Pro n sudá vyjde poslední sčítanec sumy jako $\binom{n-\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}} + \binom{n-\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}-1} = \binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}} + \binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}-1}$. První kombinační číslo nemá smysl. Pokud jej ale položíme rovno nule, celý výpočet je bez problémů. Kdybychom se zdráhali tento trik použít, museli bychom zvlášť vypočítat případy pro sudá a lichá n.

Opět je myšlenka řešení zjevně patrná při pohledu na barevně odlišené prvky Pascalova trojúhelníka.

Poznámka:
Každý z příkladů jsme vyřešili pomocí pohledu na Pascalův trojúhelník a využití jeho vlastností (resp. vlastností kombinačních čísel). Pro zajímavost uvedeme ještě řešení všech příkladů pomocí kombinatorické úvahy (metoda též zvaná jako „počítání dvěma způsoby“). Čtenář si laskavě povšimne rozdílnosti obou přístupů.

Pro zdárné vyřešení je potřeba vědět, že kombinační číslo $\binom{n}{k}$ vyjadřuje počet k-prvkových podmnožin dané n-prvkové množiny.

Kombinatorické řešení příkladu 1:
Levá strana dokazované identity $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ udává součet počtů k-prvkových podmnožin dané n-prvkové množiny pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Jinými slovy počet všech podmnožin této n-prvkové množiny. Pravá strana ovšem zřejmě vyjadřuje stejnou kvantitu – pro každý z n prvků máme dvě možnosti – buď tento náleží, nebo nenáleží dané podmnožině. Dle pravidla součinu je tedy počet možností výběru prvků (a tedy i počet podmnožin) roven 2^n.

Kombinatorické řešení příkladu 2:
Pravá strana rovnosti $\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n}{k} = \binom{m+n+1}{m}$ je rovna počtu všech m-prvkových podmnožin (m+n+1)-prvkové množiny $A = \{0, 1, \dots, m+n\}$. Rozdělme tyto podmnožiny do m+1 skupin $S_0, S_1 \dots, S_m$, podle nejmenšího čísla z A, které nenáleží dané podmnožině (precizně: $S_i = \{M \subseteq A\colon |M| = m, \min(A \setminus M) = i\}$). Vidíme, že velikost skupiny S_0 je $|S_0| = \binom{m+n}{m}$, neboť obsahuje právě všechny m-prvkové podmnožiny množiny $\{1, \dots, m+n\}$. Podobně je pro libovolné $1 \le i \le m$ velikost S_i rovna $|S_i| = \binom{m+n-i}{m-i}$, protože každá množina z S_i je sjednocením množiny $\{0, \dots, i-1\}$ a nějaké podmnožiny (m+n-i)-prvkové množiny $\{i+1, \dots, m+n\}$. Celkem dostáváme $\sum_{i=0}^{m}|S_i| = \sum_{i=0}^{m}\binom{m+n-i}{m-i}$. Poslední výraz substitucí $k = m - i$ upravíme na požadovaný tvar $\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n}{k}$.

Kombinatorické řešení příkladu 3:
Nyní potřebujeme z rukávu vytáhnout poslední trik: Člen F_i Fibbonacciho posloupnosti totiž vyjadřuje počet způsobů, jak lze číslo i vyjádřit jako součet čísel 1 nebo 2 (záleží na pořadí sčítanců). Dokážeme indukcí. Pro $i = 0$ je jediný způsob – prázdný součet. Podobně pro $i = 1$ je jediným způsobem identita $1 = 1$. Pro $i > 1$ rozdělme součty do dvou skupin. V první jsou ty součty, které začínají sčítancem 1, těch je zřejmě F_{i-1}. Druhá skupina součtů, začínajících na 2, obsahuje F_{i-2} součtů.

Víme tedy, že pravá strana dokazované identity $\sum_{k=0}^{2k\le n}\binom{n-k}{k} = F_n$ vyjadřuje počet způsobů, jak nezáporné celé číslo n vyjádřit jako součet jedniček a dvojek. Rozdělme tyto součty do skupin S_k, kde k značí počet dvojek, který obsahuje každý ze součtů v S_k. Zřejmě je $0 \le 2k \le n$. Každý součet z S_k tedy obsahuje k dvojek a $n - 2k$ jedniček, tedy $n - k$ sčítanců. Jejich počet je tedy $|S_k| = \binom{n-k}{k}$ – stačí nám vybrat pozice, na kterých jsou v součtu dvojky. Celkem dostáváme $\sum_{k=0}^{2k\le n}|S_k| = \sum_{k=0}^{2k\le n}\binom{n-k}{k}$, což je levá strana rovnosti.