



## Finanční matematika

autor: Pavel Sikora

**dlužník** ten, kdo si půjčuje (a pak dluží)

**věřitel** ten, kdo půjčuje („věří, že mu dlužník peníze vrátí“)

**jistina** částka, která je půjčena nebo uložena jako vklad

**úrok** celková cena, kterou dlužník zaplatí věřiteli navíc k jistině (udáváme v Kč, příp. jako úrokovou míru v % půjčené částky)

- Úrok je samozřejmě pro dlužníka nevýhodný, na druhou stranu bez něj by neměl věřitel důvod půjčku nabízet. Úroky tedy podporují trh s úvěry. Úvěr přitom může být oboustranně výhodný:  
**pro dlužníka** v tom, že získá kapitál, který může investovat a vydělat pomocí něj více peněz, než je úvěr  
**pro věřitele** v tom, že rozmnoží své peníze vlastně „bez práce“
- Výše úrokové míry je dána mnoha faktory: doba trvání půjčky, důvěryhodnost dlužníka, celková ekonomická situace. Uplatňuje se princip „high risk, high reward“: Např. Česká republika má u agentury *Fitch* velmi dobrý rating AA-, takže je velmi vysoká pravděpodobnost, že půjčku vrátí včetně úroků, a tak si může peníze půjčovat s malou úrokovou mírou. Z hlediska věřitele se v takovém případě jedná o *investiční půjčku*. Naproti tomu Etiopie má velmi špatný rating CCC, takže podle názoru agentury *Fitch* je poměrně reálné, že půjčené peníze nebude schopna vrátit, přičemž toto zvýšené riziko věřitelé budou chtít kompenzovat vysokou úrokovou mírou. Z hlediska věřitele se v takovém případě jedná o *spekulativní půjčku*.

**roční úroková míra** vyjadřuje, o kolik % by se zvýšila částka, kterou má dlužník vrátit, pokud by měl peníze půjčené na dobu jednoho roku (setkáme se se zkratkou „% p. a.“, tj. „% per annum“ neboli „% za rok“)

**spotřebitelský úvěr** je půjčka na nějaké spotřební zboží (tj. něco, co můžeme spotřebovat = dovolená, auto, televize, ...) – z hlediska finanční bezpečnosti je to „špatná“ půjčka

**hypotéka** je úvěr, za nějž ručíme nemovitostí, na kterou si půjčíme (půjčka je tak méně riziková a úroky mohou být nižší než u spotřebitelského úvěru) – z hlediska finanční bezpečnosti je to v podstatě „dobrá“ půjčka, protože se jedná spíše o investici než o spotřebu

**americká hypotéka** peníze si půjčíme na cokoliv, ale stále ručíme nějakou nemovitostí (vlastně spotřebitelský úvěr krytý nemovitostí) – z hlediska finanční bezpečnosti je to vůbec nejhorší typ půjčky

**RPSN** (roční procentní sazba nákladů) vyjadřuje skutečné roční náklady na půjčku (včetně poplatků atd.), přičemž zohledňuje i rychlost splácení – nejlépe vyjadřuje skutečnou „cenu“ půjčky



**inflace** udává, o kolik % ročně rostou ceny zboží (vždy právě uplynulý rok = 100 %)

- Inflace vyjadřuje vlastně znehodnocení peněz. Pokud je inflace např. 2 %, pak boty, které letos stojí Kč 2000, budou za rok stát Kč 2040 Kč. Moje dvoutisícikorunová bankovka tak ztratí na hodnotě – letos mi na nákup bot stačí, příští rok už nebude.

Mohlo by se zdát, že inflace je čistě negativní jev, ale ve skutečnosti je pro fungování ekonomiky prakticky nezbytná. Pokud vím, že mé peníze budou ztrácet na hodnotě, jsem motivován k tomu, abych je utrácel – ať už jako spotřebu nebo investici. Pohyb peněz je přitom klíčový pro chod ekonomiky – pokud lidé neutrácí peníze, podnikatelé nemají důvod vyrábět zboží ani nabízet služby a ekonomika zpomaluje až zastavuje.

Příliš vysoká inflace je ale také problém, neboť peníze jako platidlo vlastně přestávají dávat smysl, lidé ve velmi krátké době přichází de facto o veškeré své úspory a moderní ekonomika se hroutí. (Smutným rekordmanem je poválečné Maďarsko. Zatímco v roce 1944 bylo nejvyšší bankovkou 1000 pengő, v polovině roku 1946 už to byla bankovka v hodnotě sto milionů miliard (tj.  $10^{20}$ ) pengő. Měsíční inflace dosáhla až neuvěřitelných  $1,3 \cdot 10^{16}$  %, takže ceny se zdvojnásobily každých 15 hodin. Pokud by tedy např. v pondělí ráno výše zmíněné boty stály Kč 2000, v pátek večer by se prodávaly za Kč 512 000. Když v srpnu 1946 proběhla měnová reforma a pengő bylo nahrazeno forintem, celková hodnota všech maďarských bankovek v oběhu byla rovna  $\frac{1}{100\,000}$  amerického dolaru.)

Národní banky, které jsou za měnovou politiku státu zodpovědné, si stanovují tzv. *inflační cíl*, tj. „ideální“ výši inflace, ke které by chtěli směřovat. Česká národní banka dříve měla kolem 4–5 %, mezi lety 2006–2010 pak  $(3 \pm 1)$  % a od roku 2010  $(2 \pm 1)$  %. Mezi 2–3 % se pohybují i inflační cíle jiných světových národních bank, přičemž některé (např. Evropská centrální banka nebo švýcarská SNB) mají jako cíl inflaci do 2 %.

Dá se tedy zjednodušeně říct, že inflace menší než 1 % s sebou přináší negativní jev zpomalení ekonomiky, zatímco inflace výrazně vyšší než 3 % způsobuje chudnutí obyvatelstva.

**deflace** je opak inflace

- Ačkoliv by se na první pohled mohlo zdát, že pro lidi je deflace výhodná, neboť zboží zlevňuje, z výše uvedeného víme, že opak je pravdou. Dochází totiž k útlumu spotřeby („Proč bych si auto kupoval teď, když za rok bude levnější?“), firmy přestávají vyrábět, prodávat a krachují.

**nominální mzda** je „počet peněz“, které za práci dostaneme (ale samo o sobě nám to nic neříká o její výši, neboť nevíme, co si za to můžeme koupit)

**reálná mzda** je kupní síla mzdy (očistěná od inflace, navázaná na cenovou hladinu v dané zemi), vyšší reálná mzda tedy znamená, že si můžeme koupit více zboží

- Spousta lidí si neuvědomuje, že i přes negativní vliv inflace si můžeme dovolit čím dál více zboží, pokud reálné mzdy rostou rychleji. Např. 1 kg kuřecího masa v roce 1989 stál sice jen Kčs 30, zatímco v roce 2012 už Kč 60, a zdánlivě tak zdražilo na dvojnásobek. Mzdy ale vyrostly více než dvojnásobně, takže reálná cena kuřecího masa vzhledem k platu byla naopak méně než třetinou (další podobné příklady viz <http://www.zakomunistu.cz/>).



## Úlohy

1. *Momentálně je v ČR inflace vysoká, ale dříve byla naopak opravdu velmi malá. V roce 2014 to byly 4 %, v roce 2015 3 % a v roce 2016 pak 7 %. Kolik by na konci roku 2016 měl stát automobil, který v lednu 2014 prodávali za 400 000 Kč?*

Je nutné si uvědomit, že inflaci počítáme z cen předchozího roku, takže nejde vše počítat z původní částky 400 000 Kč.

- Na konci roku 2014 automobil bude stát o 4 % více, tj.  $100,4\% \cdot 400\,000 = 401\,600$  Kč.
- Na konci roku 2015 automobil bude stát o další 3 % více, tj.  $100,3\% \cdot 401\,600 \doteq 402\,805$  Kč.
- Konečně na konci roku 2016 automobil bude stát ještě o 7 % více, tj.  $100,7\% \cdot 402\,805 \doteq 405\,625$  Kč.

2. *Paní Květa se podařilo vynalézt stroj času. V první zkušební sérii vyrobila 10 kusů, přičemž celkové výrobní náklady byly 27 023 107 Kč. Protože stroj času je poměrně vzácná věc, mohla si paní Květa beze strachu dovolit nasadit extrémně vysokou marži ve výši 10 000 %.*

(a) *Paní Květa nedisponovala takovými finančními prostředky, a tak si vypůjčila v bance. Banka jí poskytla desetiletý úvěr, na jehož konci celkem splatí 30 milionů Kč. Jaký byl úrok a roční úroková míra této půjčky?*

(b) *Za kolik paní Květa prodávala jeden stroj času? (Uvědom si, jaké ve skutečnosti vlastně byly výrobní náklady na jeden stroj, tj. co vše je třeba do nich započítat.)*

(c) *Až později si paní Květa uvědomila, že z prodeje musí státu odvést daň z příjmu ve výši 15 %. Vypočítejte skutečný výdělek paní Květy.*

(a) Paní Květa musí bance splatit jistinu (27 023 107 Kč) a úrok, který tvoří zbytek do 30 milionů (tzn.  $30\,000\,000 - 27\,023\,107 = 2\,976\,893$  Kč). Úrok tedy tvořil  $\frac{2\,976\,893}{27\,023\,107} \doteq 0,11 = 11\%$ . Úvěr byl sjednán na 10 let, tzn. že na jeden rok připadá 1,1 %, což je tedy roční úroková míra.

(b) Do nákladů je nutné započítat i cenu půjčky, takže vyrobit 10 strojů času paní Květu stálo 30 milionů Kč, na jeden tedy vychází 3 miliony Kč. Z toho 10 000 % je 300 milionů Kč – marže je však jen samotný výdělek, takže prodejní cena jednoho stroje času byla 303 miliony Kč.

(c) Zisk paní Květy za prodej jednoho stroje času byl 300 milionů Kč – z této částky musela odvést daň 15 %, tj. 45 milionů Kč. Čistý zisk tedy nebyl celých 300 milionů Kč, ale „jen“ 255 000 000 Kč.

3. *Na Wikipedii se o RPSN píše:*

RPSN vyjadřuje úrokovou míru, pro kterou se rovná čistá současná hodnota získaných půjček čisté současné hodnotě výdajů (splátek, poplatků apod.), jedná se tedy o takové  $r$ , pro které platí následující rovnice:

$$\sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{(1+r)^{s_j}},$$

kde

- $m$  je počet poskytnutých půjček,
- $A_i$  je výše  $i$ -té poskytnuté půjčky,
- $t_i$  je doba (v letech a zlomcích roku ode dne 1. půjčky), kdy byla  $i$ -tá půjčka poskytnuta,



- $n$  je počet plateb,
- $B_j$  je výše  $j$ -té platby (splátky, poplatku atd.),
- $s_j$  je doba (v letech a zlomcích roku ode dne 1. půjčky), kdy byla  $j$ -tá platba zaplacená.

Uvažme případ, kdy 1. ledna 2023 banka zákazníkovi půjčí 10 000 Kč s 5% úrokem, přičemž zákazník musí navíc zaplatit administrativní poplatek za poskytnutí služeb 300 Kč. Jaké je RPSN, pokud:

- (a) zákazník celou částku splatí 1. ledna 2024;  
(b) zákazník bude dluh splácet ve čtyřech stejně velkých čtvrtletních splátkách?

Banka zákazníkovi celou půjčku poskytla najednou okamžitě, takže  $m = 1$ ,  $A_i = 10\,000$ ,  $t_1 = 0$ , tzn. levá strana rovnice vždy bude rovna 10 000.

Úrok je 5%, a tedy celková částka, kterou zákazník bance vrátí, je  $105\% \cdot 10\,000 + 300 = 10\,800$  Kč.

- (a) V tomto případě je situace jednoduchá, neboť probíhá jediná splátka, a to přesně rok po poskytnutí půjčky. Je tedy  $n = 1$ ,  $B_j = 10\,800$ ,  $s_1 = 1$ :

$$\begin{aligned} 10\,000 &= \frac{10\,800}{(1+r)} \\ 1+r &= \frac{10\,800}{10\,000} \\ r &= 1,08 - 1 \\ r &= 0,08 \end{aligned}$$

Ačkoliv úrok (a vzhledem k jednoleté délce půjčky i roční úroková míra) byl jen 5%, RPSN je díky poplatkům 8%.

- (b) Zde je situace mnohem složitější, neboť probíhají čtyři splátky ( $n = 4$ ), každá ve výši  $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \frac{10\,800}{4} = 2\,700$  Kč. Splátky probíhají čtvrtletně, a tak okamžiky splátky jsou  $s_1 = \frac{1}{4}$ ,  $s_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $s_3 = \frac{3}{4}$ ,  $s_4 = \frac{4}{4} = 1$ . Bude tedy:

$$10\,000 = \frac{2\,700}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{2\,700}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\,700}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} + \frac{2\,700}{(1+r)}$$

Vyřešit takovou rovnici je poměrně náročné (nejlépe je zavést substituci  $(1+r)^{\frac{1}{4}} = t$  a následně řešit rovnici čtvrtého stupně), ale výsledek bude  $r \doteq 0,13$ . RPSN takového půjčky tedy bude 13%.

Proč je ve druhém případě RPSN o více než polovinu větší, i když vlastně vracíme stejné množství peněz? Je to proto, že v prvním případě jsme měli celých 10 000 Kč půjčených po celý rok a mohli jsme jimi volně disponovat. Ve druhém případě máme ve skutečnosti celých 10 000 Kč půjčeno jen na čtvrt roku – na půl roku máme k dispozici 7 500 Kč, na tři čtvrtě roku 5 000 Kč, ale celý rok můžeme volně disponovat jen částkou 2 500 Kč.

Za stejné náklady je tak ve druhém případě poskytnuta „horší služba“ – a vyšší RPSN právě i tento efekt dokáže zachytit.