Výpočet Ludolfova čísla π – Buffonova úloha o jehle

a

Úvod do teorie her

Autor: Zdeněk Kadeřábek

Anotace:

Tento materiál slouží jako pracovní list pro zpestření výuky a představení oblasti matematiky, která není součástí povinných osnov. Studenti se zde seznámí s jiným způsobem řešení matematických problémů než jsou zvyklí z klasické hodiny. QR kódy motivují studenty k dalšímu zamyšlení se nad řešenými problémy.

Oba materiály – Úvod do teorie her a Výpočet Ludolfova čísla – lze zařadit během libovolné hodiny. Pracovní list Výpočet Ludolfova čísla lze využít jako zpestření výuky po probrání obvodu a obsahu kruhu, iracionálních čísel nebo pravděpodobnosti.

Oba pracovní listy jsou určeny pro starší žáky ZŠ a žáky SŠ. Časová délka každého materiálu odpovídá jedné vyučovací hodině.

Za zdroji je umístěn postup řešení úloh z uvedené diplomové práce.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost" je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie, Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Výpočet Ludolfova čísla π

Ludolfovo číslo je matematická konstanta udávající poměr obvodu kruhu k jeho průměru. Jeho hodnotu lze snadno nalézt například měřením obvodu a průměru mince

$$\pi = \frac{o}{d}$$

Už žáci na základní škole rychle zjistí, že π je konstanta, protože jim vychází stejná hodnota uvedeného poměru bez ohledu na velikost mince.

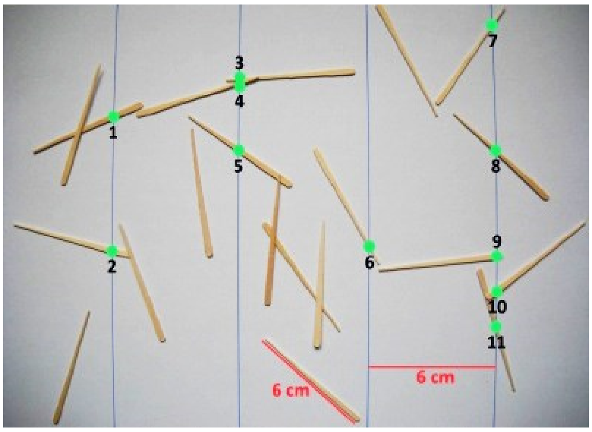
- Pro odhad hodnoty π lze využít vepsaného pravidelného n-úhelníku do kružnice, viz animace v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/fhgfhyjj

Lze určit hodnotu Ludolfova čísla pomocí náhody?

Představme si rovinu, na níž jsou narýsovány rovnoběžky a jejichž vzdálenost je d. Na tuto rovinu házíme náhodně jehlu délky $l, l \leq d$. Ptáme se: Jaká je pravděpodobnost, že jehla přetne některou z rovnoběžek?

Takto zní slavná matematická úloha, kterou v roce 1777 vymyslel francouzský matematik Georges Louis Leclerc de Buffon a je známá pod názvem **Buffonova úloha o jehle**. Nejpozoruhodnější na tomto jevu je, že při dostatečném počtu hodů jehlou umožňuje spočítat přibližnou hodnotu čísla π.

Rozbor úlohy:



Pravděpodobnost, že hozená jehla dopadne na čáru, spočítáme takto:

$$P = \frac{v}{n} = \frac{\text{počet průsečíků jehly s linkou}}{\text{počet hodů}}$$

Pro $l \approx d$ dostaneme $P = \frac{2l}{\pi d}$, z čehož při dosazení z prvního vztahu pro *P* dostáváme $\boldsymbol{\pi = \frac{2ln}{vd}}$.
Platí, že čím více hodů provedeme, tím bude odhad hodnoty π přesnější (přibližování se k přesné hodnotě není moc rychlé).

Video: Buffon's needle experiment
https://www.youtube.com/watch?v=3VHp_E5FfQM

Pozn.: Například Volf v roce 1850 provedl 5 000 hodů a dostal pro π odhad 3.1596. Problém Buffonovy jehly poprvé převedl do praxe Lazaroni v roce 1901, když provedl 34 080 hodů jehlou a došel k hodnotě $\pi = 3.1415929$. Po zavedení počítačů se však naskytla příležitost tento pokus nasimulovat na počítači a rychlost „pokusů" o několik řádů zrychlit. Metoda řešení matematických úloh pomocí modelování náhodných veličin a statistického odhadu se nazývá **metodou Monte Carlo**.

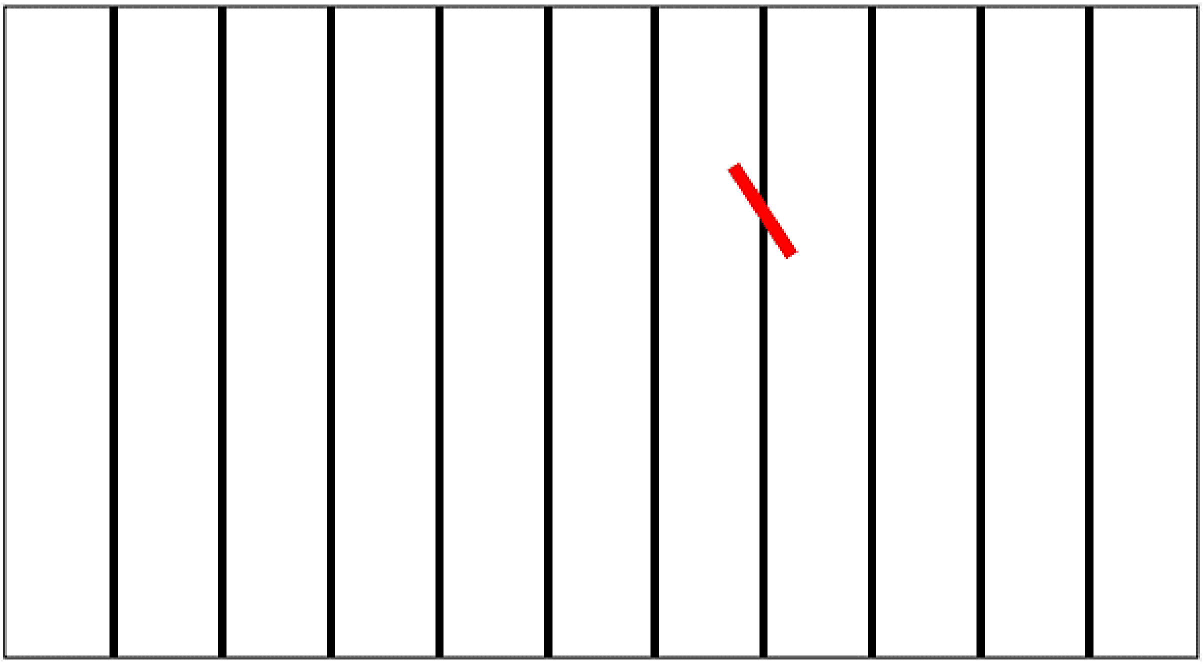
Pravděpodobnost jevu, kdy jehla stejné délky, jako je vzdálenost mezi rovnoběžkami, po dopadu na papír zůstane ležet na papíře tak, že protíná některou z linek je rovna $\frac{2}{\pi}$.

Nyní už zbývá vzít si linkovaný papír, tyčku přibližně stejné délky jako jsou mezery mezi linkami a začít náhodně házet. Jaká hodnota π Ti vychází?

Při výpočtu využij vztah pro pravděpodobnost: $P = \frac{2}{\pi} = \frac{\text{počet průsečíků jehly s linkou}}{\text{počet hodů}}$

Jak vyjádřit hodnotu π?

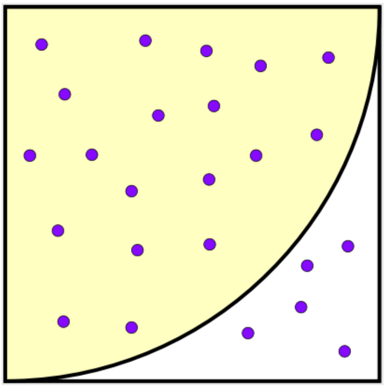
Kolik Ti vyšla přibližná hodnota? Jak výsledek zpřesnit?



- Pokud nemáte tyčku, lze využít i animaci v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/cmzHmeJ9
- **Rozšiřující video:** Estimate π with pasta? Why is pi here? Buffon's noodle problem (3blue1brown) https://www.youtube.com/watch?v=e-RUyCs9B08

Podobně lze stanovit hodnotu Ludolfova čísla π pomocí následujícího příkladu. Řešení této jednodušší úlohy nám objasní, jak lze uvažovat při řešení Buffonovy úlohy.

Příklad: Narýsujme čtverec o straně délky *r* a do něj čtvrtkruh se středem v jednom rohu čtverce s poloměrem také *r.* Nyní házejme náhodně kuličky do čtverce a výsledný poměr počtu všech hodů a hodů do čtvrtkruhu stanoví hodnotu π.



- **Nápověda:** Při náhodném dopadu kuličky bude pravděpodobnost dopadu do určitého místa úměrná velikosti dané plochy.

Napadá Tě, jak vypočítat pravděpodobnost a hodnotu π?

Výpočet:

Jaké jsou obsahy jednotlivých ploch?

Jak vypočítat pravděpodobnost dopadu do čtvrtkruhu? $P = \frac{\quad}{\quad}$

Co platí pro Ludolfovo číslo π?

Jaké jsou Tvé výsledky?

$P = \frac{\text{počet hodů do čtvrkruhu}}{\text{počet hodů}} = \text{výsledná pravděpodobnost z výpočtu}$

Jaká vychází hodnota π?

Zdroje:

- Joan Gómez – Neeuklidovské geometrie (když se přímky zakřivují), str. 105-107
- Š. Voráčová – Animace v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/fhgfhyjj
- Buffonova jehla v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/vnAZxxzN nebo https://www.geogebra.org/m/cmzHmeJ9
- Rozšiřující prezentace prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D., FAST VŠB Ostrava: http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/ppk_tema03.pdf
- Rozšiřující videa:
  - Buffon's needle experiment https://www.youtube.com/watch?v=3VHp_E5FfQM
  - Estimate π with pasta? Why is pi here? Buffon's noodle problem (3blue1brown) https://www.youtube.com/watch?v=e-RUyCs9B08

Řešení příkladu:

- Obsah čtverce je $S_1 = r^2$
- Obsah čtvrtkruhu je $S_2 = \frac{\pi r^2}{4}$

Pravděpodobnost, že kulička náhodně dopadne do čtvrtkruhu je dána poměr obsahů jednotlivých ploch: $P = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{r^2} = \frac{\pi}{4}$

--> **Pro Ludolfovo číslo platí $\boldsymbol{\pi = 4 \cdot \frac{S_2}{S_1}}$**, kde počet hodů do čtvrtkruhu je S_2 a celkový počet hodů S_1.

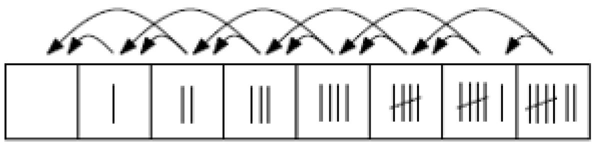
Úvod do teorie her

Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací, které mohou nastat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Herně-teoretické modely se pak snaží tyto konfliktní situace nejen analyzovat, ale sestavením matematického modelu daného konfliktu a pomocí výpočtů se snaží nalézt co nejlepší strategie pro konkrétní účastníky takových konfliktů. Teorii her založil jeden z předních matematiků John von Neumann.

Hra je matematický model rozhodovací situace, jejíž výsledek závisí na rozhodnutí alespoň dvou různých hráčů. Protože takové situace můžeme nalézt téměř ve všech oblastech týkajících se našeho života, obor aplikací teorie her je mimořádně široký a bohatý. Zahrnuje ekonomii, telekomunikace, politologii, sociologii, biologii, etiku, dopravu a mnoho dalších oblastí.

Hra 1: Sedm sirek
Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

Počty sirek s možnými tahy:



Podívejte se na hru od konce. Kdy je pro hráče výherní předposlední kolo?

Jaký hráč má výherní výhodu? Jaká má být jeho strategie při hře?

Hra 2: Ořechy
V košíku je 17 ořechů. Míša s Filipem se pravidelně střídají v tazích, začíná Míša. V každém tahu sní hráč minimálně jeden ořech a maximálně třetinu všech zbývajících ořechů. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

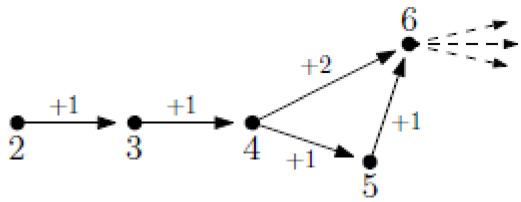
Přemýšlejte podobně jako v předchozí hře od konce.

Jaký hráč má vyhrávající strategii? Popište ji.

Hra 3: Přičítání dělitelů (kradení strategií)
Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele. Kdo jako první překročí hodnotu 5773, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5773, vyhrál?

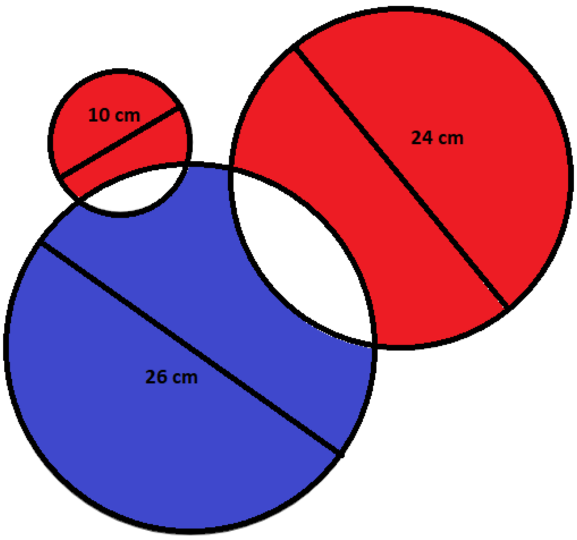
Řešení. Nakresleme si, jak vypadá prvních pár pozic, viz obrázek.

Díky tomu, že hra je konečná a nepřipouští remízy, je pozice 6 buď vyhrávající, nebo prohrávající. Pokud je prohrávající, pak začínající hráč, který je na řadě rovněž v pozici 4, bude volit přičtení dvojky, čímž se druhý hráč dostane do prohrávající pozice 6.



Na druhou stranu, je-li pozice 6 vyhrávající, pak začínající hráč může z pozice 4 táhnout do pozice 5, odkud jeho protivník musí nutně táhnout do pozice 6, čímž se první hráč ocitl ve vyhrávající pozici. Tím jsme dokázali, že **první hráč má vyhrávající strategii – vždy si ji může pro sebe ukrást.**
[A. Skálová, Teorie her pro nadané žáky SŠ, str. 19]

Únik od tématu: Kruhy
Na obrázku jsou tři kruhy se zadaným průměrem. Je větší červená nebo modrá plocha? Vypočítejte, o kolik se barevné plochy liší.



Chcete se dozvědět více o teorii her v praxi? Podívejte se na následující přednášku nebo Vězňovo dilema.

- Teorie her v praxi - Branislav Bošanský, https://www.youtube.com/watch?v=WH-H0a_wlK8

- Vězňovo dilema, Radek Pelánek https://www.youtube.com/watch?v=iOiuQJibkQE

Představte si, že jste uvězněn spolu s vaším komplicem, jste držen každý zvlášť a jste zvlášť vyslýcháni. Máte možnost vypovídat proti tomu druhému nebo mlčet.
Policie na vás skoro nic nemá, a pokud se oba svorně rozhodnete mlčet, dostanete oba tak akorát podmínku. Pokud však pomůžete vašeho kolegu usvědčit, půjde on sedět na deset let a vy vyváznete bez trestu. Totéž platí i v opačném případě. A pokud se rozhodnete oba vypovídat proti tomu druhému, půjdete sedět na pět let oba. Jak se rozhodnete?

Hra na toto téma spočívá v tom, že se proti sobě postaví dva algoritmy na předem neznámý počet kol a mají hrát tak, aby maximalizovaly svůj zisk při nějakém bodovém ohodnocení jednotlivých tahů. --> https://php.vrana.cz/veznovo-dilema.php

Zdroje:

Hry a jejich řešení je převzato z diplomové práce **Teorie her pro nadané žáky středních škol, Alena Skálová**, https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/129490/

Přednáška z teorie her, Magdalena Hykšová, https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/hyksova.pdf

Video:

- Teorie her v praxi, Branislav Bošanský https://www.youtube.com/watch?v=WH-H0a_wlK8
- Vězňovo dilema, Radek Pelánek https://www.youtube.com/watch?v=iOiuQJibkQE
  Jakub Vrána, Vězňovo dilema a programování, https://php.vrana.cz/veznovo-dilema.php

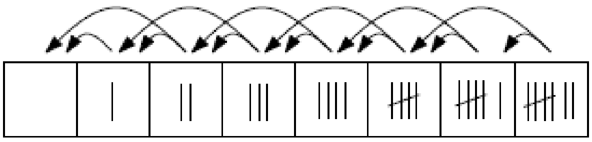
Řešení

Hra 1: Sedm sirek

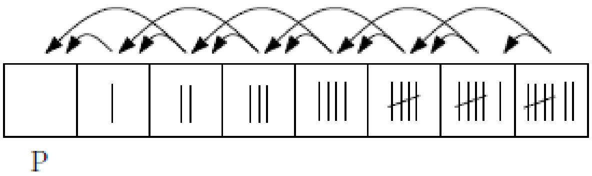
Postup řešení naleznete na str. 14 v diplomové práce A. Skálové, Teorie her pro nadané žáky středních škol, https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/129490/, viz obrázek níže.

Hra 1. Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

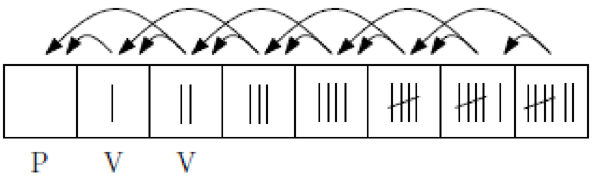
Řešení. Nakreslete si možné počty sirek včetně možných tahů z jednotlivých pozic – viz následující obrázek.



Koncová pozice je v této hře jediná (na stole nezbyla žádná sirka) a podle pravidel je prohrávající. Můžeme si to poznačit do nákresu.

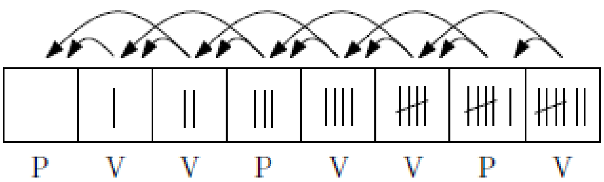


Pokud na stole zbývá jedna nebo dvě sirky, může je hráč ve svém tahu všechny odebrat a tím vyhrát (jeho soupeř se dostane do pozice, o které už víme, že je prohrávající).



Zbývají-li na stole tři sirky, pak hráč nemá jinou možnost než táhnout do vyhrávající pozice (což jistě potěší jeho protihráče), a tedy tři sirky jsou prohrávající pozice.

Z hromádky čtyř, resp. pěti sirek lze odebrat jednu, resp. dvě a tím se dostat do prohrávající pozice – proto jsou obě tyto pozice vyhrávající. Podobně si můžeme rozmyslet, že šest sirek je prohrávající pozice a sedm vyhrávající.

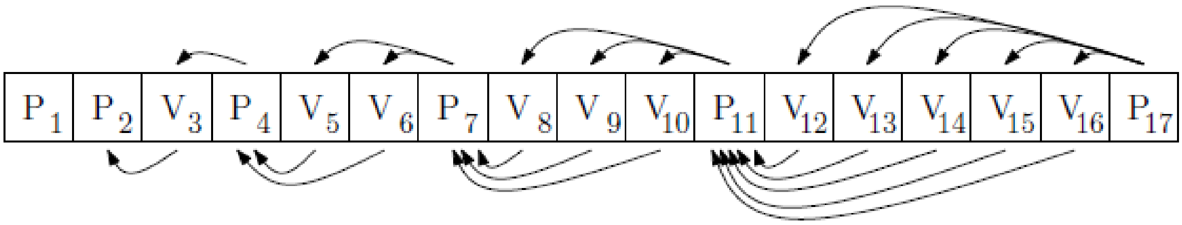


Po označení V a P pozic v této hře je ihned patrná vyhrávající strategie prvního hráče – hraj tak, aby protihráči zbyly na stole sirky v počtu násobků tří. ♠

Hra 2: Ořechy

Postup řešení naleznete na str. 27 v diplomové práce A. Skálové, Teorie her pro nadané žáky středních škol, https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/129490/, viz obrázek níže.

Úloha 1. Úlohu budeme řešit podobně jako v seriálu. Nakresleme si možné pozice (počty ořechů) – viz následující obrázek. Postupně určíme, zda jsou vyhrávající nebo prohrávající.



Již ze zadání víme, že pozice s jedním a dvěma ořechy jsou prohrávající, neboť pokud bychom z nich chtěli táhnout, mohli bychom sníst maximálně $\frac{1}{3}$, resp. $\frac{2}{3}$ ořechu, ale protože můžeme jíst pouze celé ořechy, nemůžeme nic sníst, tedy nemáme tah a prohráli jsme. Pozice 3 je vyhrávající, protože se z ní umíme dostat do pozice 2, která je prohrávající. Pozice 4 je prohrávající, protože se z ní umíme dostat jen do vyhrávající pozice 3, a ze stejného důvodu jsou prohrávající i pozice 7, 11 a 17 – viz odpovídající tahy na obrázku. Vyhrávající strategii má druhý hráč, tedy Filip, a to držet Míšu vždy na prohrávajících pozicích.[14]

Kruhy

Odpověď: 0

Označme bílé plochy X, Y. Pak platí, že $\pi \cdot 13^2 - X - Y - (\pi \cdot 12^2 - X + \pi \cdot 5^2 - Y) = 169\pi - 144\pi - 25\pi = 0$.