jcmm

Soustavy lineárních rovnic - matice

Mgr. Aleš Kobza, Ph. D.

Anotace:

V tomto textu se nejprve seznámíme s nástrojem, který nám usnadní řešení soustav (systémů) lineárních rovnic (dále stručně jen SLR). Budou jím tzv. matice, jejichž potřebné vlastnosti zde budeme studovat.

Ve druhé části materiálu se již pustíme do vlastního řešení SLR právě pomocí zmíněných matic. Vysvětlíme si v něm tzv. Gaussovu eliminační metodu a naučíme se ji používat.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie, Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Soustavy lineárních rovnic - užití matic

V tomto textu se nejprve seznámíme s nástrojem, který nám usnadní řešení soustav (systémů) lineárních rovnic (dále stručně jen SLR). Budou jím tzv. matice, jejichž potřebné vlastnosti zde budeme studovat. Ve druhé části materiálu se již pustíme do vlastního řešení SLR právě pomocí zmíněných matic. Vysvětlíme si v něm tzv. Gaussovu eliminační metodu a naučíme se ji používat.

Matice

Definice. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. (Reálnou) *maticí* typu m/n rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \{1; 2; \ldots; m\}$, $j \in \{1; 2; \ldots; n\}$. Čísla a_{ij} nazýváme prvky matice. Uspořádanou n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ nazýváme i-tým řádkem matice A, uspořádanou m-tici čísel $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ nazýváme j-tým sloupcem matice A. Stručně píšeme $A = (a_{ij})$ (typu m/n).
Je-li $m = n$, hovoříme o *čtvercové* matici řádu n.
Pokud pro všechna $i \in \{1; 2; \ldots; m\}$, $j \in \{1; 2; \ldots; n\}$ platí $a_{ij} = 0$, mluvíme o *nulové* matici, v opačném případě říkáme, že je matice *nenulová*.
O řádku (sloupci) matice řekneme, že je *nenulový*, obsahuje-li alespoň jedno nenulové číslo. Jinak říkáme, že je *nulový*.

Poznámky.

1. Je-li matice A typu m/n, znamená to, že je tvořena m řádky a n sloupci.
2. Uvedená definice souvisí s definicí SLR. Všimněte si, že prvky definované matice odpovídají všem koeficientům SLR (2) definované v předchozím materiálu. Naší snahou tedy bude vybudovat aparát, který nám umožní řešenou SLR přepsat do matice a s jejím využitím ji algoritmicky vyřešit.
3. Dvě matice se rovnají, jestliže se rovnají všechny jejich prvky na odpovídajících si pozicích. Přesněji řečeno pro matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ platí $A = B$ právě tehdy, když jsou současně splněny podmínky:
   a) obě matice jsou téhož typu m/n (tzn. obě mají stejný počet řádků i stejný počet sloupců),
   b) $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1; 2; \ldots; m\}$, $j \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je nenulová matice typu m/n. Řekneme, že matice A je ve *schodovitém* (*stupňovitém*, *trojúhelníkovém*) tvaru, jestliže každý její následující řádek začíná větším počtem nul než řádek jemu bezprostředně předcházející. *Hodností* matice A rozumíme počet jejích nenulových řádků ve schodovitém tvaru. Hodnost matice A značíme $h\,(A)$.

Příklady. Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A je typu $3/6$, čtvercová matice B je pak řádu 4, matice C je typu $5/4$. Matice A i C jsou ve schodovitém tvaru, $h\,(A) = 3$, $h(C) = 4$. Matice B není ve schodovitém tvaru, protože její druhý i třetí řádek začíná dvěma nulami. Třetí řádek tedy nezačíná větším počtem nul než řádek druhý. Z uvedeného tvaru matice B proto nelze ihned určit její hodnost. Vidíme, že je-li matice ve schodovitém tvaru, pak její první řádek může, ale nemusí začínat jednou či více nulami.

Dále se budeme zabývat úpravou matice do schodovitého tvaru. Budeme přitom provádět jen vhodné úpravy (tzv. elementární řádkové úpravy), které budou později reprezentovat ekvivalentní úpravy řešené SLR. Za tím účelem potřebujeme zavést další pojmy.

Definice. Elementární řádkovou úpravou (dále stručně EŘÚ) matice rozumíme libovolnou z následujících úprav:

1. záměna dvou řádků matice (tzn. výměna jejich pozic v matici),
2. vynásobení libovolného řádku matice nenulovým číslem,
3. přičtení násobku libovolného řádku k jinému řádku,
4. vypuštění (či připsání) nulového řádku.

Tyto úpravy jsou v následujícím smyslu ekvivalentní.

Definice. Matice B vzniklá z matice A pomocí jedné EŘÚ se nazývá ekvivalentní s maticí A, píšeme $A \sim B$.

Platí, že pokud $A \sim B$, je také $B \sim A$, neboť zřejmě musí v takovém případě existovat jediná EŘÚ, po jejímž provedení „zpětně“ z B vznikne zase A. Proto můžeme stručně říkat, že matice A a B jsou ekvivalentní. Z tohoto důvodu můžeme dále hovořit též o ekvivalentní úpravě matice. Máme tím na mysli takovou úpravu matice A, která ji převede na s ní ekvivalentní matici B, tzn. $A \sim B$. Taková ekvivalentní úprava matice tedy může být tvořena více „vhodnými“ EŘÚ. V dalším uvidíme, že provádět více EŘÚ najednou nemůžeme bez omezení. Ukážeme si, že současným provedením už dvou „nevhodných“ EŘÚ lze dostat matici, která s původní maticí ekvivalentní není.

Definice. Jsou-li matice A a B ekvivalentní, pak definujeme $h(A) = h(B)$.

Zdůrazněme, že to, že jsou matice A a B ekvivalentní, zajišťuje skutečnost, že jedna vznikla z druhé pomocí jediné EŘÚ. Zejména to znamená, že pokud bychom najednou provedli více „nevhodných“ EŘÚ, takto vzniklé matice by nemusely být ekvivalentní. Takovou situaci si ukážeme na konkrétním příkladu. Aby bylo patrné, jaké úpravy s maticí provádíme, budeme dodržovat jistá pravidla značení. Při zápisu úprav budeme do kulatých závorek zapisovat číslo řádku v bezprostředně předcházející matici a číslo případně napsané před závorkou bude značit jeho násobek. Například zápis $(2) + 3\,(1)$ tedy značí, že takový řádek vznikl tak, že ke druhému řádku předchozí matice byl přičten trojnásobek prvního řádku této matice.

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2)+(3) \\ (3)+(2) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = B\,.$$

Matice B tedy vznikla z matice A pomocí dvou EŘÚ. Dále zřejmě platí

$$B \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3)-(2) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C\,.$$

Zápis $B \sim C$ je pravdivý, neboť C vznikla z B pomocí jediné EŘÚ. Platí tedy $h(B) = h(C) = 2$. Nyní upravujme matici A tak, že použijeme vždy právě jednu EŘÚ. Platí tedy

$$A \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2)+(1) \\ (3) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3)-(1) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ -\frac{3}{2}(2)+(3) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = D\,.$$

Platí tedy $A \sim D$, takže $h(A) = h(D) = 3$. Odtud zejména plyne, že matice A a B nejsou ekvivalentní, neboť nemají stejnou hodnost. Uvedený výpočet ukazuje, že při provádění vždy jediné EŘÚ v rámci jednoho kroku výpočtu jsme sice schopni matici upravit do schodovitého tvaru, ale takový postup by v obecném případě (hlavně pro matice s větším počtem řádků) mohl být opravdu hodně zdlouhavý. Zefektivněním tohoto postupu získáme algoritmus, při jehož dodržení budeme moci provést více EŘÚ během jednoho kroku (tj. v průběhu úpravy jedné matice) a přitom budeme mít jistotu, že nově vzniklá matice je ekvivalentní s maticí předchozí, což znamená, že obě mají stejnou hodnost.

Algoritmus úpravy nenulové matice na schodovitý tvar pomocí EŘÚ.

1. „Nejjednodušší“ řádek (zpravidla nezačíná 0) vybereme na první místo (tj. napíšeme jej do prvního řádku v nově tvořené matici) a jeho vhodné násobky (někdy to tedy mohou být i násobky nulou) přičítáme k nenulovým násobkům dalších řádků tak, aby po této úpravě všechny nově vzniklé řádky začínaly větším počtem nul než vybraný řádek. Znamená to, že vybraný řádek je některý z těch, který začíná nejmenším počtem nul ze všech řádků v matici.

2. a) První řádek opíšeme.
   b) „Nejjednodušší“ řádek začínající 0 (zpravidla je další číslo v něm již nenulové) vybereme na druhé místo (tj. napíšeme jej do druhého řádku v nově tvořené matici) a jeho vhodné násobky přičítáme k nenulovým násobkům dalších řádků (kromě prvního) tak, aby všechny po této úpravě nově vzniklé řádky začínaly větším počtem nul než řádek vybraný na druhé místo. Znamená to, že řádek vybraný na druhé místo je některý z těch, který začíná nejmenším počtem nul ze všech řádků v matici kromě prvního.

3. a) První dva řádky opíšeme.
   b) „Nejjednodušší“ řádek začínající alespoň dvěma nulami (zpravidla je třetí číslo v něm již nenulové) vybereme na třetí místo (tj. napíšeme jej do třetího řádku v nově tvořené matici) a jeho vhodné násobky přičítáme k nenulovým násobkům dalších řádků (kromě prvního a druhého) tak, aby všechny po této úpravě nově vzniklé řádky začínaly větším počtem nul než řádek vybraný na třetí místo. Znamená to, že řádek vybraný na třetí místo je některý z těch, který začíná nejmenším počtem nul ze všech řádků v matici kromě prvního a druhého.

4. Postup opakujeme, dokud nedostaneme schodovitý tvar. Závěrečným krokem ještě může být vypuštění případných nulových řádků.

Poznámky.

1. Při dodržení uvedeného algoritmu jsou všechny matice v průběhu popsaných úprav vzájemně ekvivalentní. Na konci výpočtu tedy snadno zjistíme hodnost původní matice.

2. Je přitom důležité, aby v daném kroku byl pro „tvorbu nul“ používaný výhradně v tomto kroku vybraný řádek. Tento postup totiž zajistí, že nedojde ke vzniku nulového řádku způsobem, při kterém by dotyčné matice nebyly ekvivalentní (nenastane tedy situace z příkladu matic A a B, které nebyly ekvivalentní). Někdy se při výpočtu může zdát, že tento algoritmus není numericky nejvýhodnější (bylo by numericky pohodlnější k úpravě využít jinou dvojici řádků). Zejména při úpravě matice s větším počtem řádků však při takovém „zlepšení“ postupu pak hrozí, že dostaneme nulový řádek po „dvakrát stejné úpravě“ (jak se to stalo ve zmíněném jednoduchém příkladu), aniž by to bylo

patrné a řešitel si toho všiml (k „zamotání se“ totiž může dojít třeba „nenápadně“ až po více úpravách). Proto takové „nealgoritmické“ postupy není vhodné provádět.

3. Důsledkem definice schodovitého tvaru je skutečnost, že matice, která obsahuje aspoň dva nulové řádky nemůže být ve schodovitém tvaru. Abychom takovou matici do schodovitého tvaru upravili, je formálně nutné jeden či více těchto nulových řádků vypustit tak, aby výsledná matice obsahovala nejvýše jeden nulový řádek. Je přitom lhostejné, zda ve schodovitém tvaru necháme jeden či žádný nulový řádek. Obě tyto možnosti uvedená definice připouští.

4. V libovolném místě algoritmu lze navíc provést úpravu vynásobení příslušného řádku nenulovým číslem. Je to vhodné, abychom tak získali (v absolutní hodnotě) menší čísla, se kterými se nám dále bude pohodlněji počítat.

5. Dalším „dovoleným“ zrychlením algoritmu, které nám nemůže způsobit „potíže“ popsané ve druhé poznámce, je vypuštění takového řádku, který je stejný s jiným řádkem v matici.

Řešené příklady.

1. Zadané matice upravte do schodovitého tvaru a určete jejich hodnosti

   a)

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & 8 & 15 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení. Na prvním místě nemůže zůstat první řádek, protože začíná nulou, zatímco ostatní řádky nulou nezačínají. Do prvního řádku napíšeme ten řádek, pomocí něhož se nám budou „pohodlně tvořit nuly“. V našem případě se nabízí řádek, který začíná číslem 1. Jeho vhodné násobky tedy budeme přičítat k ostatním řádkům, aby po této úpravě začínaly nulou. V případě prvního řádku v tomto smyslu nemusíme dělat nic, tj. přičteme k němu druhý řádek vynásobený číslem 0. Pro získání „příjemnějších“ prvků v matici jej však bude výhodné vynásobit číslem $\frac{1}{5}$ (v souladu se 4. poznámkou). Postupujme důsledně dle uvedeného algoritmu

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & 8 & 15 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 12 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (2) \\ \frac{1}{5}\,(1) \\ (3) - 5\,(2) \\ (4) - 4\,(2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -32 & -32 & 0 & 32 \\ 0 & -27 & -27 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

Dle druhého kroku algoritmu si nyní máme vybrat „nejjednodušší“ řádek začínající 0 na druhé místo. Toto hledisko druhý řádek splňuje, takže jej na této pozici ponecháme. První řádek budeme do konce výpočtu již jen opisovat (a to stále do prvního řádku každé z dalších matic). V dalších řádcích se pak nabízí krátit (tj. násobit takový řádek nenulovým číslem ve tvaru zlomku), abychom dále pracovali s „menšími čísly“. Pomocí druhého řádku pak budeme „vyrábět nuly“ také ve druhém sloupci třetího i čtvrtého řádku matice

$$E \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -32 & -32 & 0 & 32 \\ 0 & -27 & -27 & 0 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ -\frac{1}{32}\,(3) \\ -\frac{1}{27}\,(4) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \tag{1}$$

$$\sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) + (2) \\ (4) + (2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V našem případě se touto úpravou vynulovaly dokonce celé řádky (třetí a čtvrtý). Získaná matice však formálně není ve schodovitém tvaru (viz 3. poznámka). Zbývá nám alespoň jeden z nulových řádků vypustit. Platí tedy

$$E \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h(E) = 2\,.$$

Libovolný z tvarů matice na předchozím řádku je přitom již schodovitý. Dodejme, že jsme při výpočtu mohli využít rovněž úvahu z 5. poznámky a vypustit už jeden ze stejných řádků ve druhé matici úpravy (1), takže platí například také

$$E \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3)+(2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h(E) = 2\,.$$

b)

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 & 14 & -4 & 14 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 6 & 22 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 9 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Zadaná matice neobsahuje řádek, který by nezačínal nulou, takže i řádek vybraný na první místo musí nulou začínat. „Nejmenší čísla“ spatřujeme ve třetím řádku, proto si na první pozici umístíme jej a postupujeme podle prezentovaného algoritmu

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 5 & 6 & 22 \\ 0 & 6 & -2 & 14 & -4 & 14 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 9 & -5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (3) \\ 3\,(1)+8\,(3) \\ (2)+2\,(3) \\ 3\,(4)-5\,(3) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 15 & 58 & 82 \\ 0 & 0 & -2 & 14 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & -15 & 27 & -40 & -28 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že nejvhodnějším „kandidátem“ na druhou pozici je třetí řádek, který bude ještě (v souladu se 4. poznámkou) vhodné vynásobit číslem $\frac{1}{2}$

$$F \sim \begin{array}{r} (1) \\ \frac{1}{2}\,(3) \\ (2)+\frac{9}{2}\,(3) \\ -\,(4)+\frac{15}{2}\,(3) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 78 & 85 & 163 \\ 0 & 0 & 0 & 78 & 85 & 163 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 78 & 85 & 163 \end{pmatrix}.$$

Poslední úprava spočívala ve vypuštění jednoho ze dvou stejných řádků matice (viz 5. poznámka). Získali jsme tak schodovitý tvar, z něhož vidíme, že $h(F) = 3$.

2. V závislosti na hodnotách parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ diskutujte o hodnosti matice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zadanou matici nejprve upravme užitím zmíněného algoritmu

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & 0 & -c \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ 2\,(2)-(1) \\ 2\,(3)-(1) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2a & 2b-1 \\ 0 & 0 & -2c-1 \end{pmatrix}.$$

Nyní se již můžeme pustit do diskuse.

- Nejmenší hodnost bude mít matice G právě tehdy, když budou oba poslední řádky nulové. (První řádek je nenulový vždy.) To nastane právě tehdy, když současně platí $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ a $c = -\frac{1}{2}$. V tomto případě je $h(G) = 1$.
- Naopak největší hodnost bude mít matice G právě tehdy, když budou oba poslední řádky nenulové. To nastane tehdy a jen tehdy, když současně platí $a \neq 0$ a $c \neq -\frac{1}{2}$. V této situaci platí $h(G) = 3$.
- Ve všech ostatních případech pak je $h(G) = 2$.

Poznamenejme, že častou chybou bývá nesprávné vyhodnocení případu $a = 0$, $b \neq \frac{1}{2}$. Znamená to, že první dva řádky jsou nenulové. V případě, že je nenulový i poslední řádek (tj. pokud $c \neq -\frac{1}{2}$), pak matice není ve schodovitém tvaru. Bylo by tedy nesprávné tvrdit, že má hodnost 3. Rozepíšeme-li detailně její úpravu do schodovitého tvaru, přesvědčíme se, že v této situaci skutečně platí $h(G) = 2$, jak jsme uvedli výše. Pro $a = 0$, $b \neq \frac{1}{2}$ a $c \neq -\frac{1}{2}$ máme

$$G \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2b-1 \\ 0 & 0 & -2c-1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ {[2c+1]}\,(2) + [2b-1]\,(3) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2b-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h(G) = 2\,.$$

Zadání úloh.

1. Zadané matice upravte do schodovitého tvaru a určete jejich hodnosti

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & -6 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby pro matici

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}$$

   platilo $h(N) = 2$.

3. V závislosti na hodnotách parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ diskutujte o hodnosti matice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. $h(H) = 3$, $h(I) = 2$, $h(J) = 4$, $h(K) = 3$, $h(L) = 4$ a $h(M) = 4$.

2. Matici lze upravit do ekvivalentního tvaru

$$N \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}.$$

   odkud je vidět, že musí být $a = 3$.

3. Matici lze upravit do ekvivalentního tvaru

$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 3 & a+b \\ 0 & 0 & 2a-b-3c \end{pmatrix}.$$

   Platí $h(P) = 2$ právě tehdy, když $b = 2a - 3c$, jinak $h(P) = 3$.

Gaussova eliminační metoda

Definice. Uvažujme SLR

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

(definovaný v předchozí části). Pak matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme *maticí systému* (2), resp. *rozšířenou maticí soustavy* (2).

Svislá čára před posledním sloupcem matice $\overline{A}$ pouze zdůrazňuje pozici symbolu = v jednotlivých rovnicích systému (2). Jde jen o optické rozhraní (vymezení matice A v matici $\overline{A}$, tzn. zvýraznění, že se jedná o její „podmatici“), jiný význam tato čára nemá. Při následných úpravách takové matice tuto čáru jen opisujeme, jinak s maticí pracujeme tak, jako by v ní tato čára vůbec nebyla.

Zřejmě platí následující tvrzení.

Věta. Každá z níže popsaných úprav systému (2) je jeho ekvivalentní úpravou (tzn. nemění tvar množiny jeho všech kořenů v $\mathbb{R}^n$):

1. záměna dvou rovnic,
2. vynásobení libovolné rovnice systému nenulovým číslem,
3. přičtení násobku libovolné rovnice systému k jiné rovnici systému,
4. vypuštění (či připsání) „nulové“ rovnice, tj. rovnice tvaru $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$.

Jistě jste si všimli, že ve větě popsané úpravy přesně odpovídají (již dříve popsaným) elementárním řádkovým úpravám (dále stručně EŘÚ) rozšířené matice $\overline{A}$ systému (2). Díky tomu již dostáváme metodu řešení SLR.

Postup řešení SLR (2), tzv. Gaussova eliminační metoda (stručněji Gaussova eliminace).[1]

1. Řešený systém (2) přepíšeme do maticového tvaru, dostaneme tak rozšířenou matici systému $\overline{A}$.
2. Matici $\overline{A}$ upravíme (pomocí dříve uvedeného algoritmu) do schodovitého tvaru.
3. Od posledního řádku matice ve schodovitém tvaru zapisujeme (směrem nahoru) jednotlivé rovnice a při tom postupně dopočítáváme hodnoty jednotlivých neznámých.

Popsaný postup nyní ilustrujme řešením několika konkrétních příkladů. Postihneme přitom všechny případy, které v principu mohou nastat.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), slavný německý matematik a fyzik s jehož matematickými objevy a myšlenkami se i během středoškolského studia matematiky budeme opakovaně setkávat v řadě matematických disciplín (algebra, geometrie, teorie čísel, matematická analýza).

Řešené příklady.

1. V $\mathbb{R}^5$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & - & 4x_5 & = & -4 \\
5x_1 & + & 5x_2 & & & + & 8x_4 & - & x_5 & = & -7 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 8 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & -1 \\
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & -3 \\
3x_1 & - & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 3
\end{array}.$$

2. V $\mathbb{R}^4$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -7 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
-x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -5 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 1
\end{array}.$$

3. V $\mathbb{R}^5$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & 2v & + & 2x & + & 2y & - & 4z & = & 5 \\
u & + & 2v & + & x & + & y & - & 2z & = & 3 \\
-u & - & v & - & x & + & y & + & 2z & = & 0 \\
-2u & + & 3v & + & 3x & & & - & 6z & = & 2
\end{array}.$$

4. V $\mathbb{R}^5$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0
\end{array}.$$

5. V $\mathbb{R}^5$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
4u & + & 5v & - & 5x & - & 5y & + & 7z & = & 3 \\
3u & + & 3v & - & 3x & - & 3y & + & 4z & = & 2 \\
2u & + & v & - & x & - & y & + & z & = & 1 \\
u & - & v & + & x & + & y & - & 2z & = & 0
\end{array}.$$

6. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby soustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2v & - & x & + & y & + & z & = & 1 \\
v & + & 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\
v & + & 7x & - & 4y & + & 11z & = & a
\end{array}$$

měla v $\mathbb{R}^4$ řešení.

Řešení.

1. Rozšířená matice soustavy je tvaru

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -4 \\
5 & 5 & 0 & 8 & -1 & -7 \\
2 & -1 & 3 & -4 & 2 & 8 \\
1 & 2 & -3 & 4 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -3 \\
3 & -5 & -1 & 2 & -1 & 3
\end{array}\right)$$

a platí pro ni

$$\overline{A} \sim \begin{array}{r} (5) \\ (4)-(5) \\ (3)-2\,(5) \\ (1)-2\,(5) \\ (6)-3\,(5) \\ (2)-5\,(5) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -8 & 8 & 14 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 8 & 12 \\ 0 & 10 & 5 & -2 & 14 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ \frac{1}{2}\,(5) \\ (3)+\frac{1}{2}\,(5) \\ (2)+\frac{3}{2}\,(5) \\ (4)+\frac{3}{2}\,(5) \\ (6)+5\,(5) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 14 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 14 & 20 \\ 0 & 0 & 15 & -22 & 54 & 68 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (4) \\ 3\,(4)-\frac{1}{2}\,(3) \\ 15\,(4)-(6) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 14 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 36 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & -38 & 156 & 232 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ 38\,(4)-7\,(5) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 14 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 36 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 276 & 276 \end{array}\right).$$

Poslednímu řádku odpovídá rovnice $276x_5 = 276$, tedy $x_5 = 1$. Z předposledního řádku pak dostáváme

$$-7x_4 + 36x_5 = 50 \quad \Leftrightarrow \quad x_4 = \frac{1}{7}\,(36x_5 - 50) = \frac{1}{7}\,(36 \cdot 1 - 50) = -2\,.$$

Ze třetího řádku pak vypočteme

$$x_3 - 4x_4 + 14x_5 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 4x_4 - 14x_5 + 20 = 4 \cdot (-2) - 14 \cdot 1 + 20 = -2\,.$$

Ze druhého řádku vyplývá

$$-x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 6 = -2 - 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 - 6 = 0\,.$$

Konečně z páté rovnice systému (viz 1. řádek matice) obdržíme

$$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 - 3 = 0 - 2 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 3 = 2\,.$$

Řešená soustava tak má právě jedno řešení, je jím uspořádaná pětice $[2; 0; -2; -2; 1]$, což formálně zapíšeme $K = \{[2; 0; -2; -2; 1]\}$. Zjistili jsme také, že $h\,(A) = h\left(\overline{A}\right) = 5 = n$, kde n značí počet neznámých. Vidíme, že prvky jednotlivých matic nemusí být úplně malá čísla. Je patrné, že výhodnost užití uvedeného postupu se zvětšuje s počtem rovnic (a neznámých). Dodejme, že při úpravách matic lze vybrat jiné řádky a pak provádět jiné úpravy, než bylo výše uvedeno. Proto lze ve schodovitém tvaru získat jinou matici, která však musí být ekvivalentní s maticí zde uvedenou. Znamená to, že výsledek musí vyjít stejně!

2. Platí

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2)-2\,(1) \\ (3)+(1) \\ (4)-(1) \\ (5)-3\,(1) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 7 & 22 \end{array}\right).$$

Všimněme si, že v tomto kroku nesmíme na druhé místo vybrat třetí řádek, protože začíná hned dvěma nulami. Máme totiž k dispozici jiné řádky, které začínají jen jednou nulou. Zvolme si třeba čtvrtý řádek a pokračujme ve výpočtu

$$\overline{A} \sim \begin{array}{r} (1) \\ (4) \\ \frac{1}{2}\,(3) \\ 3\,(2)-5\,(4) \\ 3\,(5)-2\,(4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 14 & 38 \\ 0 & 0 & -10 & 23 & 62 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ 5\,(3)+(4) \\ 5\,(3)+(5) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 62 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ 28\,(4)-19\,(5) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -114 \end{array}\right).$$

Tentokrát jsme vypočetli, že $h\,(A) = 4 \neq h\left(\overline{A}\right) = 5$. Podle posledního řádku by mělo platit, $0x_4 = -114$, což není možné. Soustava tedy nemá řešení, $K = \emptyset$.

3. Opět upravujme rozšířenou matici soustavy do schodovitého tvaru. Raději ještě zdůrazněme, že první řádek nemůžeme nechat na první pozici. Vybereme-li na první místo řádek třetí, dostaneme

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (3) \\ (1) \\ (4)-2\,(3) \\ (2)+(3) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} (1) \\ (4) \\ 5\,(4)-(3) \\ (2)-2\,(4) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (4) \\ 2\,(3)+5\,(4) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 21 \end{array}\right).$$

Z posledního řádku získáme rovnici $14y = 21$, takže $y = \frac{3}{2}$. Pokračujme třetím řádkem. Tomu odpovídá rovnice $2x - 2y - 4z = -1$. Po dosazení za $y = \frac{3}{2}$ obdržíme $2x - 4z = 2$, neboli $x = 2z + 1$. Jedná se o jednu rovnici se dvěma neznámými. Tu nevyřešíme jednoznačně. Má evidentně nekonečně mnoho řešení. Za jednu z neznámých (buď x, nebo z) je možné zvolit cokoliv (tj. chápat ji jako volnou neznámou, často se používá také termín „parametr“) a tu druhou s ohledem na zvolený údaj dopočteme (již bez možnosti volby). Vzhledem k našemu vyjádření bude vhodné jako parametr chápat neznámou z, protože neznámou x již máme pomocí ní vyjádřenou. Když zapíšeme jako rovnici druhý řádek matice, máme $v + 2y = 3$ a po dosazení za $y = \frac{3}{2}$ dostaneme $v = 0$. Konečně z prvního řádku (tj. třetí rovnice systému) obdržíme vyjádření poslední neznámé u, kterou jsme dosud neurčili

$$-u - v - x + y + 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -v - x + y + 2z = 0 - 2z - 1 + \frac{3}{2} + 2z = \frac{1}{2}.$$

Vidíme, že samotné zjištění, že systém má nekonečně mnoho řešení, je neúplné. Naší snahou je jednotlivá řešení popsat. Shrneme-li naše zjištění do matematicky přesného a přitom stručného zápisu, obdržíme závěr

$$K = \left\{ \left[\frac{1}{2}; 0; 2z+1; \frac{3}{2}; z\right],\ \text{kde } z \in \mathbb{R} \text{ je libovolné} \right\}.$$

Znamená to tedy, že soustava má nekonečně mnoho řešení, která lze vyjádřit (ve společném tvaru) pomocí jednoho parametru. Doplňme, že volbu parametru jsme (v rovnici odpovídající třetímu řádku matice) mohli udělat „opačně“. Kdybychom jako parametr v rovnici $x = 2z + 1$ zvolili x, (tj. v okamžiku, kdy už víme, že $y = \frac{3}{2}$) dostali bychom $z = \frac{1}{2}\,(x - 1)$, přičemž na určení dalších neznámých by tato změna neměla žádný vliv. Skutečně

$$v = 3 - 2y = 0 \quad \text{a} \quad u = -v - x + y + 2z = 0 - x + \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\,(x-1) = \frac{1}{2}$$

V této situaci bychom výsledek zapsali ve tvaru

$$K = \left\{ \left[\frac{1}{2}; 0; x; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\,(x-1)\right],\ \text{kde } x \in \mathbb{R} \text{ je libovolné} \right\}.$$

Oba uvedené výsledky jsou přitom ekvivalentní. Za povšimnutí ještě určitě stojí skutečnost, že i v situaci, kdy má systém nekonečně mnoho řešení, se může (ale nemusí) stát, že některé z neznámých (jedna případně i více) nabývají jen jediné možné hodnoty. V našem případě se to týká dokonce tří neznámých: u, v a y. V každém z nekonečně mnoha řešení soustavy totiž platí $u = \frac{1}{2}$, $v = 0$ a $y = \frac{3}{2}$. Konečně se ještě podívejme na informaci, kterou jsme získali o hodnostech matic. Platí $h(A) = h\left(\overline{A}\right) = 4 < n$, kde n značí počet neznámých, tedy $n = 5$.

4. Vzhledem k tomu, že absolutní členy všech rovnic systému jsou rovny nule, bude tento systém mít alespoň (triviální) řešení $x_1 = x_2 = \ldots = x_5 = 0$. Výpočtem tedy budeme zjišťovat, existuje-li ještě nějaké jeho řešení.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (3) \\ (1)-2\,(3) \\ (2)-3\,(3) \\ (4)-2\,(3) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} (1) \\ (4) \\ (3)+4\,(4) \\ (2)+5\,(4) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (3)-(4) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Protože poslední (nulový) řádek matice je možné vypustit, nepřekvapí nás, že jeho analýzou nic nezískáme (zjištění, že $0 = 0$ není příliš objevné). Začněme se tedy rovnou zabývat řádkem třetím. Jemu odpovídající rovnice $-8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0$ je rovnicí o třech neznámých, proto dvě z nich budou volné (parametry). Je naším rozhodnutím, které neznámé za parametry zvolíme. Vyjádříme-li například x_4 (tzn. za parametry zvolíme neznámé x_3 a x_5), dostaneme

$$x_4 = 2x_3 + \frac{5}{4}x_5 \,.$$

Díky druhému řádku pak vypočteme

$$-x_2 - x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_3 \,.$$

tzn. pomocí již zvoleného parametru x_3 jsme vyjádřili další neznámou (nyní x_2). Konečně z prvního řádku máme

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2\,(-x_3) - x_3 + \left(2x_3 + \frac{5}{4}x_5\right) - x_5 = -x_3 + \frac{1}{4}x_5 \,,$$

takže

$$K = \left\{ \left[-x_3 + \frac{1}{4}x_5; -x_3; x_3; 2x_3 + \frac{5}{4}x_5; x_5 \right], \text{ kde } x_3, x_5 \in \mathbb{R} \text{ jsou libovolné} \right\} .$$

Dodejme, že vzájemně ekvivalentních (a zdánlivě odlišných) výsledků je v této úloze možné získat vetší množství. Záleží na způsobu provedených úprav matic a volbě parametrů. Jiné možné tvary výsledků však není nutné hledat. Snadno můžeme zkontrolovat, že triviální řešení, jehož existence jsme si všimli již v úvodu výpočtu, mezi nalezenými řešeními opravdu figuruje (dostaneme jej volbou $x_3 = x_5 = 0$). Na závěr výpočtu ještě poznamenejme, že $h(A) = h\left(\overline{A}\right) = 3 < n$, kde n značí počet neznámých, tedy $n = 5$. Konečně ještě doplňme, že v souladu s výkladem o úpravě matice do schodovitého tvaru jsme v posledním kroku mohli poslední řádek vypustit, protože je stejný s řádkem předposledním. Jednalo by se však jen o formálně jiný zápis a na další úvahy by to nemělo žádný vliv.

5. Počítejme obdobně jako v předchozích úlohách

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (4) \\ (3)-2\,(4) \\ (2)-3\,(4) \\ (1)-4\,(4) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right).$$

Místo pokračování ve formálních úpravách matice si můžeme všimnout, že třetí řádek je dvojnásobkem druhého a čtvrtý řádek je trojnásobkem druhého řádku, proto poslední dva řádky nesou stejnou informaci jako řádek druhý a můžeme je tedy vypustit. Zjišťujeme tak, že

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right),$$

přičemž $h(A) = h\left(\overline{A}\right) = 2 < n$, kde n značí počet neznámých, tedy $n = 5$. Rovnice odpovídající druhému řádku je tvaru

$$3v - 3x - 3y + 5z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = x + y - \frac{5}{3}z + \frac{1}{3}.$$

Pokud bychom se formálně chtěli vyhnout zlomkům, je možné parametry zvolit i jiným způsobem než tak, jak jsme to dělali doposud. Nemusí se totiž jednat přímo o jednotlivé neznámé! Vzhledem k získanému vyjádření se například nabízí zvolit $x = t$, $y = s$ a $z = 3r - 1$, protože pak platí

$$v = x + y - \frac{5}{3}z + \frac{1}{3} = t + s - \frac{5}{3}(3r-1) + \frac{1}{3} = t + s - 5r + 2.$$

Z poslední rovnice soustavy (viz první řádek matice) pak dostáváme

$$u - v + x + y - 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v - x - y + 2z = t + s - 5r + 2 - t - s + 2(3r-1) = r,$$

tudíž

$$K = \{[r; t + s - 5r + 2; t; s; 3r - 1],\ \text{kde } r, t, s \in \mathbb{R} \text{ jsou libovolné}\}.$$

Zobecníme-li úvahy provedené v dosud vyřešených příkladech, můžeme si všimnout, že základní informace o množině všech kořenů řešeného systému lze elegantně popsat právě pomocí hodností příslušných matic ve vztahu k počtu neznámých. Spor v některé z rovnic soustavy nastane jedině v případě, že dostaneme rovnici tvaru $0x = k \neq 0$, čemuž v matici odpovídá řádek tvaru $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & k\end{array}\right)$, tzn. jedině, když $h(A) < h\left(\overline{A}\right)$ (viz Př. 2). V opačném případě (viz ostatní dosud vyřešené příklady), tj. když $h(A) = h\left(\overline{A}\right)$, je soustava řešitelná, přitom má jediné řešení pouze v situaci, kdy jsou tyto hodnosti stejné jako počet neznámých (viz Př. 1). Znamená to, že máme stejný počet vzájemně nezávislých rovnic (tj. rovnic, které odpovídají až systému, jehož matice je upravena do schodovitého tvaru) jako neznámých. Proto hodnoty jednotlivých neznámých vyjdou jednoznačně.
Každá z posledních tří soustav (viz příklady 3 - 5) pak měla nekonečně mnoho řešení, pokaždé se však jednalo o závislost na jiném počtu parametrů. V těchto soustavách shodně platilo $h(A) = h\left(\overline{A}\right) < n$, kde n značí počet neznámých v příslušné soustavě. Máme tedy méně nezávislých rovnic než neznámých, tzn. jednotlivé hodnoty nemohou být určeny jednoznačně, protože vazebných podmínek mezi nimi je málo. Řešení proto musí být nekonečně mnoho, přitom počet volných neznámých (parametrů) je dán tím, o kolik nezávislých rovnic máme méně, než jaký je počet neznámých, tedy vyjadřuje jen číslo $n - h\left(\overline{A}\right) = n - h(A)$. Tyto skutečnosti v závěru tohoto textu zformulujeme přesně do vět.
Nyní se ještě pusťme do řešení zbývajícího příkladu.

6. Platí

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (2) \\ (1) - 2(2) \\ (3) - (2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) + (2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right).$$

Soustava tedy bude řešitelná právě tehdy, když bude poslední řádek nulový, tzn. jedině pro $a = 5$ (a bude v tomto případě mít nekonečně mnoho řešení, které budou záviset na $n - h\left(\overline{A}\right) = n - h(A) = 4 - 2 = 2$ volných neznámých).

Na závěr si ještě přehledně shrneme získané poznatky.

Věta (Frobeniova, resp. Kronecker - Capelliho). Uvažujme SLR (2) m lineárních rovnic o n neznámých. Nechť A značí matici a $\overline{A}$ rozšířenou matici tohoto systému. Pak platí, že systém (2) je řešitelný právě tehdy, když $h(A) = h\left(\overline{A}\right)$.

Věta. Uvažujme SLR (2) m lineárních rovnic o n neznámých, který je řešitelný. Nechť A značí matici a $\overline{A}$ rozšířenou matici tohoto systému. Pak platí, že systém (2)

1. má právě jedno řešení právě tehdy, když $h(A) = h\left(\overline{A}\right) = n$,
2. má nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když $h(A) = h\left(\overline{A}\right) < n$, přičemž počet volných neznámých (parametrů) je roven $n - h(A)$.

Důsledek. Má-li SLR (2) více než jedno řešení, pak má řešení nekonečně mnoho.

Definice. Uvažujme SLR (2) m lineárních rovnic o n neznámých, kde $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Takový systém se nazývá *homogenní*.

Důsledek Frobeniovy věty pro homogenní systém SLR. Každý homogenní systém SLR (2) m lineárních rovnic o n neznámých, je řešitelný. Jeho řešením je vždy $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [0; 0; \ldots; 0]$.