Soustavy lineárních rovnic - determinanty

Mgr. Aleš Kobza, Ph. D.

Anotace:

Text představuje podporu k výuce celku „Soustavy lineárních rovnic - determinanty“ na SŠ, jeho využití je předpokládáno zejména na gymnáziích.

V první části tohoto materiálu se seznámíme s dalším užitečným nástrojem, který lze používat při řešení soustav lineárních rovnic (dále stručně SLR). Budou jím tzv. determinanty, jejichž základní vlastnosti (a pouze ve speciálních případech) zde budeme studovat.

Ve druhé části materiálu se budeme zabývat tzv. Cramerovým pravidlem, které si zde v nejjednodušším případě dokonce odvodíme. Půjde přitom právě o počítání s determinanty.

V závěrečné třetí části tohoto textu budeme získané poznatky aplikovat při řešení soustav lineárních rovnic s parametry.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie, Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Soustavy lineárních rovnic - užití determinantů

Tento text je rozčleněn do tří částí. V první z nich se seznámíme s dalším užitečným nástrojem, který lze používat při řešení soustav lineárních rovnic (dále stručně SLR). Budou jím tzv. determinanty, jejichž základní vlastnosti (a pouze ve speciálních případech) zde budeme studovat. Ve druhé části materiálu se budeme zabývat tzv. Cramerovým pravidlem, které si zde v nejjednodušším případě dokonce odvodíme. Půjde přitom právě o počítání s determinanty. V závěrečné třetí části tohoto textu budeme získané poznatky aplikovat při řešení soustav lineárních rovnic s parametry.

Determinanty

S pojmem determinantu se v rámci středoškolské matematiky seznámíme jen okrajově a budeme se zabývat pouze speciálními případy determinantů. Nebudeme si uvádět korektní obecnou definici determinantu, protože je poměrně složitá a pro její vyslovení a pochopení v tuto chvíli nemáme dostatečné prostředky. S pojmem determinantu budeme pracovat do jisté míry intuitivně a jen v tom rozsahu, ve kterém determinanty a jejich vlastnosti v rámci středeoškolské výuky matematiky budeme potřebovat. Brzy uvidíme, že determinanty využijeme i při řešení soustav lineárních rovnic. Později se nám budou hodit například při výpočtech s vektory.

Determinant je definován pro čtvercovou matici A řádu n, značíme jej $|A|$ a jedná se o reálné číslo, které vzniká jako součet více sčítanců, přičemž každý z nich je tvořen součinem n činitelů vybraných tak, že z každého řádku a každého sloupce uvažované matice je v něm obsažen právě jeden prvek. Do výrazu $|A|$ přitom řadíme všechny sčítance, které lze popsaným způsobem sestavit, některé z nich se znaménkem $+$, jiné se znaménkem $-$. Odtud je jasné, že s rostoucím n přibývá možností, jak takové součiny sestavit, takže počet sčítanců tvořících $|A|$ se poměrně rychle zvětšuje. Pro $n = 1$ je jeden, pro $n = 2$ jsou dva, pro $n = 3$ je jich již 6. (V obecném případě se jedná o $n! = n\,(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ sčítanců.) Tato skutečnost způsobuje zmíněnou složitost obecné definice determinantu a také narůstající obtížnost výpočtu determinantu se zvětšujícím se n. Uvedený počet sčítanců lze zdůvodnit následující úvahou např. pro $n = 3$: V prvním sloupci můžeme zvolit libovolný prvek, který lze vybrat třemi způsoby. Z vybraného řádku už nesmíme vzít prvek ve druhém sloupci, takže máme k dispozici už jen 2 možnosti výběru. Prvek ze třetího sloupce je pak již určen jednoznačně. Protože pro každý prvek z prvního řádku jsme měli ve druhém sloupci dvě možnosti výběru dalšího činitele, je celkový počet sčítanců roven $3 \cdot 2 = 6$.

Při našem pojetí nyní vyslovíme definici determinantu (pro případy $n = 1$, $n = 2$ a $n = 3$) pomocí vztahů, které vyplývají z obecné definice (pro nás nedostupné) a proto jsou v odpovídající literatuře uváděny jako věty.

Definice. Uvažujme čtvercovou matici řádu n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Její determinant značíme $|A|$ a

1. pro $n = 1$, tj. pro $A = (a_{11})$ definujeme takto $|A| = a_{11}$,

2. pro $n = 2$, tj. pro

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ definujeme takto } |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,,$$

3. pro $n = 3$, tj. pro

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

definujeme takto

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Poznámky.

1. Přestože je determinant značen symbolem, který připomíná absolutní hodnotu, může být záporný. Dobře je to patrné už v nejjednodušším případě, tj. u matic řádu 1. Například pro $A = (-2)$ je $|A| = -2$.

2. Společným znakem obou definic pro $n = 2$ i pro $n = 3$ je to, že členy se znaménkem + získáváme ve směru $\searrow$, zatímco členy se znaménkem $-$ dostáváme ve směru $\nearrow$.

   a) Determinant druhého řádu se tedy vypočítá jako součin prvků na hlavní diagonále (směr $\searrow$) mínus součin prvků na vedlejší diagonále (směr $\nearrow$).

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\,, \text{ takže } |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

   b) Podobně lze postupovat i pro determinant třetího řádu. Pro lepší názornost lze pomocně zapsat první dva sloupce matice A za tuto matici a příslušné skupinky trojic činitelů se nám pak „objeví pohromadě“ (ve směru $\searrow$, resp. $\nearrow$). Tomuto postupu se říká *Sarrusovo pravidlo.*

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \dashrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

   Vidíme, že pomocí součinů příslušných tří prvků ve směru šipek (tvořících následně s patřičnými znaménky součet) pohodlněji napíšeme dříve možná hůře zapamatovatelný výraz z definice determinantu, tj.

   $$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Řešené příklady.

1. Vypočtěte determinanty matic

$$B = \left(-\sqrt{3}\right), \qquad C = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -x^3 & x^2+x+1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Počítáme podle definice s využitím uvedených poznámek

$$|B| = -\sqrt{3}\,, \qquad |C| = (1-x)\left(x^2+x+1\right) - \left[\left(-x^3\right)\cdot 1\right] = 1 \qquad \text{a}$$

$$|D| = 0\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot(-3) + 5\cdot 2\cdot 2 - (-3)\cdot(-1)\cdot 5 - 2\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot 2 = -24 + 20 - 15 - 4 = -23\,.$$

2. V algebře se často pracuje s tzv. *Vandermondovým* determinantem. Pro $n = 3$ jde o determinant Vandermondovy matice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} .$$

Dokažte, že platí $|V| = (x-y)(y-z)(z-x)$.

Řešení. Pomocí Sarrusova pravidla vypočteme příslušný determinant

$$|V| = yz^2 + xy^2 + x^2z - yx^2 - zy^2 - z^2x .$$

Protože rozklad získaného výrazu na součin by byl náročný, zvolme opačný postup. Roznásobíme-li zadaný součin a porovnáme-li oba získané výrazy, dostaneme dokazovanou rovnost

$$(x-y)(y-z)(z-x) = \big(xy - xz - y^2 + yz\big)(z-x) = xyz - x^2y - xz^2 + x^2z - y^2z + y^2x + yz^2 - xyz =$$
$$= yz^2 + xy^2 + x^2z - yx^2 - zy^2 - z^2x = |V| .$$

3. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Řešení. Levou stranu rovnice nejprve upravíme pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + 12x + 10x^2 - 4x^2 - 15x^2 - 2x = -8x^2 + 10x .$$

Nyní zbývá vyřešit kvadratickou rovnici, kterou jsme tak dostali

$$-8x^2 + 10x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x\,(4x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = \left\{0; \frac{5}{4}\right\} .$$

Vyhovují tedy právě dvě reálná x.

Zadání úloh.

1. Vypočtěte determinanty matic

$$E = (\pi) , \qquad F = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & -2 \\ a & \sqrt{a} \end{pmatrix} , \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 9 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

2. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a a b nabývá determinant

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & b^2 \\ -a^2 & -a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

nezáporné hodnoty. Najděte i všechny případy, kdy je nulový.

3. V $\mathbb{R}$ řešte rovnice

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{a} \quad \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. $|E| = \pi$, $|F| = 3a$, $|G| = 50$ a $|H| = \frac{21}{10}$.
2. Výpočtem determinantu pomocí Sarrusova pravidla dostaneme $2a^6 + 2a^4b^2 = 2a^4\left(a^2+b^2\right) \geq 0$. Rovnost nule přitom nastává právě tehdy, když $a = 0$.
3. Vychází po řadě $K = \{-2; 0\}$ a $K = \{2; 3\}$.

Cramerovo pravdlo

Řešme SLR dvou lineárních rovnic o dvou neznámých tvaru

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

pomocí Gaussovy eliminační metody. Úpravou její rozšířené matice soustavy $\overline{A}$ tak za předpokladu, že $a_{11} \neq 0$, dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ a_{11}\,(2) - a_{21}\,(1) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}\right).$$

Pokud je

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A| \neq 0\,, \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je matice této soustavy, pak

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{|A_2|}{|A|}\,, \quad \text{kde} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dosazením do první rovnice soustavy a následným výpočtem dostaneme

$$a_{11}x_1 + a_{12}\frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = b_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{11}x_1 = \frac{b_1\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) - a_{12}\left(a_{11}b_2 - a_{21}b_1\right)}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{11}x_1 = \frac{a_{11}\left(b_1a_{22} - b_2a_{12}\right)}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{|A_1|}{|A|}\,, \quad \text{kde} \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Vidíme, že neznámé této soustavy lze za jistých předpokladů vyjádřit pomocí výrazů, v nichž vystupují determinanty. Podmínka $|A| \neq 0$ je v předchozím postupu klíčová, neboť ve jmenovateli zlomku nesmí být nula. Kdyby tato podmínka neplatila, získané vzorce bychom nemohli napsat, neplatily by. Ukažme si ještě, že podmínka $a_{11} \neq 0$ byla potřebná pouze ve výše uvedeném postupu. Potřebovali jsme ji k tomu, aby uvedená úprava matice $\overline{A}$ byla ekvivalentní, tzn., aby v souladu s dříve uvedeným algoritmem platilo, že vhodný násobek prvního řádku (tzn. zde mohlo být i $a_{21} = 0$) přičítáme k nenulovému násobku druhého řádku. Uvidíme, že stejný závěr dostaneme (pouze za předpokladu $|A| \neq 0$) i v případě, že $a_{11} = 0$. Nyní tedy předpokládejme, že $a_{11} = 0$. Aby $|A| \neq 0$, je nutné a dostatečné, aby $a_{21} \neq 0$ a $a_{12} \neq 0$. V této situaci je tedy řešená soustava tvaru

$$\begin{array}{ccccc} & & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}.$$

Z první rovnice soustavy máme

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}}\,,$$

což je speciální případ vztahu (1) pro $a_{11} = 0$. Ze druhé rovnice soustavy pak vypočteme

$$a_{21}x_1 = b_2 - a_{22}x_2 = b_2 - a_{22}\cdot\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{-a_{21}a_{12}}\,,$$

což je speciální případ tentokrát vztahu (2) pro $a_{11} = 0$.

Tímto jsme ve speciálním případě, kdy $n = 2$, odvodili následující větu.

Věta (Cramerovo pravidlo). Nechť je dán SLR n lineárních rovnic o n neznámých. Nechť $|A| \neq 0$, kde A značí matici této soustavy. Pak platí, že uvažovaný systém má právě jedno řešení, $K = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n]\}$, přičemž pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde A_i je matice, která vznikla z matice A nahrazením jejího i-tého sloupce sloupcem absolutních členů.

Poznámky.

1. Nepřehlédněte, že uvedená věta se týká výhradně systémů, které mají stejný počet rovnic i neznámých. Matice A příslušné soustavy musí být čtvercová, jinak nelze uvažovat její determinant.
2. Pokud je $|A| = 0$, Cramerovo pravidlo nelze použít a pro takový případ je třeba postupovat jiným způsobem (vhodná je Gaussova eliminace).
3. Uvedená věta platí pro obecné n, byť ji s našimi znalostmi budeme využívat pro $n \leq 3$. Důkaz pro $n = 3$ by se provedl podobně jako pro $n = 2$, který jsme provedli, byl by však pracnější. Případ $n = 1$ je triviální.
4. Zvláště efektivní může být užití Cramerova pravidla k řešení homogenního systému. O něm totiž víme, že má vždy triviální řešení $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [0; 0; \ldots; 0]$. Pokud pro něj platí, že $|A| \neq 0$, znamená to, že má řešení jediné, tzn., že kromě triviálního řešení již jiné řešení nemá, tedy $K = \{[0; 0; \ldots; 0]\}$.

Řešené příklady. Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy

1. v $\mathbb{R}^2$
$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 5y & = & 5 \end{array},$$
2. v $\mathbb{R}^3$
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array},$$
3. v $\mathbb{R}^3$
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ x & + & 5y & - & 4z & = & -5 \\ 4x & + & y & - & 3z & = & -4 \end{array}.$$

Řešení.

1. Platí
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1 \neq 0\,,$$
takže systém má právě jedno řešení. Vypočteme tedy
$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A_1| = 4 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 5 \qquad \text{a} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A_2| = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2\,.$$
Proto
$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \text{a} \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2}{1} = -2\,, \quad \text{tudíž} \quad K = \{[5; -2]\}\,.$$

2. Užitím Sarrusova pravidla dostaneme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A| = -2 + 27 + 4 - 3 + 6 - 12 = 20 \neq 0\,.$$

   Protože se jedná o homogenní systém, pak použitím argumentace ze 4. poznámky ihned víme, že $K = \{[0;0;0]\}$.

3. Nejprve opět počítejme determinant matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A| = -30 + 48 + 1 - 20 + 8 - 9 = -2 \neq 0\,.$$

   I tato soustava tedy má právě jedno řešení. Dále platí

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A_1| = -30-48-5+20+8+45 = -10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-10}{-2} = 5\,,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A_2| = 30 - 32 - 4 + 20 - 32 + 6 = -12 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12}{-2} = 6\,,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad |A_3| = -40+60+2-40+10-12 = -20 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-20}{-2} = 10\,,$$

   takže $K = \{[5;6;10]\}$.

Zadání úloh.

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy

1. v $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 7 \\ 2x & + & y & = & 1 \end{array}\,,$$

2. v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}\,,$$

3. v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\,,$$

4. v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 11 \end{array}\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. $K = \{[\frac{10}{7}; -\frac{13}{7}]\}$,
2. $|A| = -3$, $K = \{[1; 2; 3]\}$,
3. vzhledem k tomu, že systém je homogenní, stačí zjištění, že $|A| = -1 \neq 0$ k závěru $K = \{[0; 0; 0]\}$,
4. $|A| = 4$, $K = \{[-10; 4; 9]\}$.

Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Všechny výpočy v tomto materiálu (tj. řešené příklady i úlohy) budeme provádět s využitím Cramerova pravidla. Řešení proto vždy zahájíme výpočtem determinantu matice soustavy. Dále bude potřeba rozlišit dva principiálně možné případy. V prvním z nich, kdy $|A| \neq 0$, má soustava právě jedno řešení a hodnoty jednotlivých neznámých určíme s využitím Cramerova pravidla ($x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$). Ve druhém případě, kdy $|A| = 0$, naopak víme, že soustava jediné řešení nemá. Může tedy mít nekonečně mnoho řešení, nebo žádné řešení. To, která z těchto variant nastane, zjistíme užitím Gaussovy eliminace. Zpravidla se v této části bude jednat o výpočet pro jednu či několik málo konkrétních hodnot parametru.

Aplikaci tohoto postupu si nejprve ukážeme na řešených příkladech. V další části textu pak najdete úlohy k procvičení.

Ještě zdůrazněme, že pro užití výše popsaného způsobu řešení je nezbytné, aby zadaná soustava byla „čtvercová“, tedy byla tvořená stejným počtem rovnic, jako je v ní neznámých. Kdyby tato podmínka nebyla splněna, bylo by potřeba celý výpočet provádět výhradně užitím Gaussovy eliminační metody.

Tento materiál je koncipován k procvičení výpočtu determinantů a užití Cramerova pravidla. Je však jasné, že v případě potřeby lze všechny v něm uvedené příklady a úlohy řešit i bez využití Cramerova pravidla, a to pouze užitím Gaussovy eliminace.

Řešené příklady.

1. Vyřešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 2 \\ ax & + & y & = & 4 \end{array}.$$

Řešení. Platí

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a\,.$$

a) Pokud $a \neq -1$, je $|A| \neq 0$ a systém má tedy jediné řešení. Abychom jej pomocí Cramerova pravidla určili, vypočteme ještě potřebné determinanty

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \qquad \text{a} \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2a\,.$$

Platí tedy

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{6}{1+a} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4-2a}{1+a}\,.$$

b) V situaci, kdy $a = -1$, tedy $|A| = 0$, budeme postupovat užitím Gaussovy eliminace. Pro rozšířenou matici této soustavy vychází

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2)+(1) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Vidíme tak, že v tomto případě soustava nemá řešení.

Jak je tomu u rovnic s parametrem obvyklé, výsledky zapíšeme do souhrnné tabulky

a	K
$\{-1\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{-1\}$	$\left\{\left[\frac{6}{1+a};\frac{4-2a}{1+a}\right]\right\}$

.

2. Vyřešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & & & = & 0 \\ & - & a^2 y & + & z & = & a \\ ax & & & + & z & = & a^2 \end{array}\,.$$

Řešení. Nejprve pomocí Sarrusova pravidla vypočteme determinant matice soustavy

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + a^2 = a^2\,(1-a)\,.$$

Dále rozlišíme případy, kdy je tento determinant nenulový a kdy je roven nule.

a) Případ $|A| \neq 0$ nastává právě tehdy, když $a \in \mathbb{R}-\{0;1\}$. V této situaci tedy výpočet provedeme užitím Cramerova pravidla. Postupnými výpočty dostaneme

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & -a^2 & 1 \\ a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{a^3-a^2}{-a^3+a^2} = -1\,,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a^3 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{a^2-a^3}{-a^3+a^2} = 1\,,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a^2 & a \\ a & 0 & a^2 \end{vmatrix} = -a^5 + a^3 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-a^5+a^3}{-a^3+a^2} = \frac{a^3\,(1-a^2)}{a^2\,(1-a)} = a\,(1+a)\,.$$

b) Případ $|A| = 0$ nastává právě tehdy, když $a \in \{0;1\}$. Pro každou z těchto hodnot parametru bude třeba postupovat odděleně a to Gaussovou eliminací.

i. Pro $a = 0$ dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \ (2)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\,.$$

Musí tedy platit, že $z = 0$, ostatní neznámé jsou volné. Soustava tedy má nekonečně mnoho řešení, které závisí na dvou volných neznámých (parametrech).

ii. Pro $a = 1$ obdržíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3)-(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\,.$$

Podle druhému řádku poslední matice platí

$$-y + z = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = y + 1\,.$$

Pomocí prvního řádku této matice pak vypočteme

$$x + y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -y\,.$$

Nyní již můžeme zapsat závěrečnou tabulku

a	K
$\mathbb{R}-\{0;1\}$	$\{[-1;1;a\,(1+a)]\}$
$\{0\}$	$\{[x;y;0]\,,$ kde $x,y\in\mathbb{R}$ jsou libovolné$\}$
$\{1\}$	$\{[-y;y;y+1]\,,$ kde $y\in\mathbb{R}$ je libovolné$\}$

Zadání úloh.

1. Určete všechny hodnoty reálných parametrů a, b a c, pro něž má soustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & & & - & az & = & b^3 \\ bx & + & ay & + & c^3z & = & a \\ ax & & & + & 2z & = & c^2 \end{array}$$

v $\mathbb{R}^3$ právě jedno řešení.

2. Určete všechny hodnoty parametru $a\in\mathbb{R}$, pro které soustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & & & = & 1 \\ & - & a^2y & + & z & = & 0 \\ ax & & & + & z & = & a^2 \end{array}$$

v $\mathbb{R}^3$ nemá žádné řešení.

3. Vyřešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic s parametrem $p\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcl} p^2x & + & py & = & 1 \\ x & + & py & = & p^2 \end{array}\,.$$

4. Vyřešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic s parametrem $p\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & p \\ & + & y & - & z & = & 1 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array}\,.$$

5. Vyřešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic s parametrem $p\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} (p+1)\,x & + & y & & & = & p^3 \\ x & + & y & + & (p-1)\,z & = & 0 \\ & & py & - & z & = & 0 \end{array}\,.$$

6. Vyřešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic s parametrem $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} (a+1)\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a^2+3a \\ x_1 & + & (a+1)\,x_2 & + & x_3 & = & a^3+3a^2 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+1)\,x_3 & = & a^4+3a^3 \end{array}\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. Je nutné a stačí, aby determinant matice soustavy byl nenulový. Vychází

$$|A| = 2a^2 + a^3\,, \qquad \text{takže} \qquad |A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} - \{0; -2\}\ .$$

2. Je nutné (a obecně nestačí), aby determinant matice soustavy byl nulový. Platí $|A| = a^2\,(1-a)$ (viz výpočet 2. příkladu, kde je stejná matice soustavy). Nyní se stačí zaměřit už jen na hodnoty $a = 0$ a $a = 1$. Pro $a = 0$ dostáváme spor už v první rovnici soustavy. Pro $a = 1$ dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3)-(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

odkud je již patrné, že v tomto případě má soustava nekonečně mnoho řešení. Hledanou hodnotou je tedy jenom $a = 0$.

3.

p	K
$\mathbb{R} - \{0; \pm 1\}$	$\left\{\left[-1; \frac{p^2+1}{p}\right]\right\}$
$\{0\}$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{[1-y; y]\,,$ kde $y \in \mathbb{R}$ je libovolné$\}$
$\{-1\}$	$\{[1+y; y]\,,$ kde $y \in \mathbb{R}$ je libovolné$\}$

4. Platí $|A| = -3$, takže soustava má vždy právě jedno řešení

p	K
$\mathbb{R}$	$\left\{\left[\frac{p+1}{3}; \frac{p+1}{3}; \frac{p-2}{3}\right]\right\}$

.

5. Platí $|A| = -p^3$,

p	K
$\mathbb{R} - \{0\}$	$\{[p^2 - p + 1; -1; -p]\}$
$\{0\}$	$\{[x; -x; 0]\,,$ kde $x \in \mathbb{R}$ je libovolné$\}$

.

6. Vychází $|A| = a^3 + 3a^2$,

a	K
$\mathbb{R} - \{0; -3\}$	$\{[2 - a^2; 2a - 1; a^3 + 2a^2 - a - 1]\}$
$\{0\}$	$\{[-x_2 - x_3; x_2; x_3]\,,$ kde $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné$\}$
$\{-3\}$	$\{[x_3; x_3; x_3]\,,$ kde $x_3 \in \mathbb{R}$ je libovolné$\}$

.