Pythagorejské trojice
a
historické souvislosti

Jana Borkovcová

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie, Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy a Jihomoravského kraje.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
jihomoravský kraj

- připomeňme si nejdřív Pythagorovu větu:

v každém pravoúhlém trojúhelníku platí:

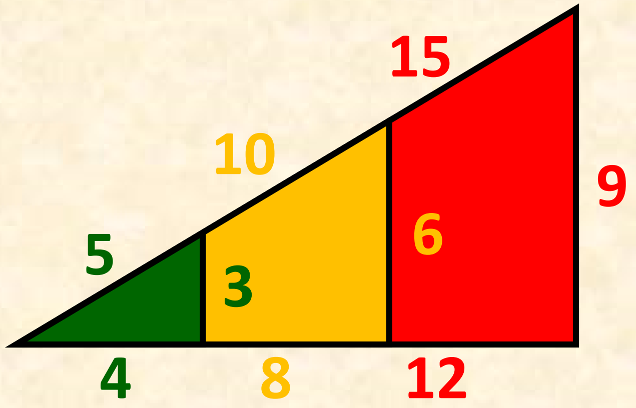
$$a^2 + b^2 = c^2$$

odvěsny přepona

- pythagorejské trojice – jsou to trojice přirozených čísel, které představují délky stran pravoúhlého trojúhelníku
    - např.: 3, 4, 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$)
      6, 8, 10 ($6^2 + 8^2 = 10^2$)
      5, 12, 13 ($5^2 + 12^2 = 13^2$)
      atd.

  (trojúhelníkům, jejichž délky stran jsou pythagorejské trojice, se někdy říká pythagorejské trojúhelníky)

- pythagorejských trojic je nekonečně mnoho
- jestliže najdeme jakoukoliv pythagorejskou trojici, stačí pak všechna čísla v této trojici postupně násobit přirozenými čísly a dostaneme vždy novou pythagorejskou trojici – původní trojúhelník se bude postupně „nafukovat“:



atd.

- Existuje ale také nekonečně mnoho opravdu různých pythagorejských trojic, což dokázal už Eukleides z Alexandrie (325 – 265 př. n. l.).
- Byl to pravděpodobně první vedoucí matematické části proslulé alexandrijské knihovny
- jmenují se po něm Eukleidovy věty o tom, v jakém poměru dělí výška pravoúhlého trojúhelníku jeho přeponu.
- Dokázal mimo jiné, že prvočísel je nekonečně mnoho a že odmocnina ze dvou není racionální číslo (– nejde napsat jako zlomek).
- Eukleida zajímala především matematika samotná a ne její praktické využití.
- Známý je příběh o studentovi, který se Eukleida zeptal, k čemu mu bude to, co se učí. Eukleides se obrátil ke svému otrokovi a řekl: „Dej tomu hochovi peníze, neboť jest jeho přáním, aby měl zisk ze svého vzdělávání." A poté vyloučil tohoto studenta ze studií. ☺
- Jeho nejslavnější dílo se jmenuje Základy.
- Tvoří je celkem 13 knih zahrnujících různé oblasti matematiky, ze kterých se matematika učila 2 000 let.
- Do 20. století se jednalo o druhé nejprodávanější dílo všech dob hned po Bibli.

- Eukleides si všiml následující vlastnosti posloupnosti druhých mocnin přirozených čísel – rozdíly mezi vedlejšími čísly v této řadě jsou postupně všechna lichá čísla počínaje číslem 3:

$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2,\ 11^2,\ 12^2,\ 13^2,\ 14^2 \ldots.$

$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196 \ldots.$

$3\quad 5\quad 7\quad 9\quad 11\quad 13\quad 15\quad 17\quad 19\quad 21\quad 23\quad 25\quad 27 \ldots.$

$9 = 3^2 \qquad 25 = 5^2$

- V této řadě lichých čísel můžeme najít hodnoty 2. mocnin – první z nich je $9 = 3^2$, první pythagorejská trojice je tedy 3, 4 a 5.
- Další v pořadí je $25 = 5^2$ a z ní dostáváme pythagorejskou trojici 5, 12 a 13.
- Protože lichých čísel je nekonečně mnoho, je mezi nimi i nekonečně mnoho druhých mocnin.
- Odmocniny z nich jsou pak součástí jednotlivých pythagorejských trojic – těch je tedy také nekonečně mnoho.

- Matematici se snažili, podobně jako hledali pythagorejské trojice, najít také trojice přirozených čísel, pro které by platilo:

$$a^3 + b^3 = c^3$$

- To se ale nikomu nepodařilo a ze 17. století pochází tzv. Velká Fermatova věta, která tvrdí, že pro žádné přirozené číslo n větší než 2 neexistují taková přirozená čísla *a*, *b*, *c*, pro která by platilo:

$$a^n + b^n = c^n$$

Velká Fermatova věta

- Velkou Fermatovu větu zformuloval Pierre de Fermat (1601 – 1665).
- Byl to vysoký soudní úředník, který se matematice věnoval ve svém volném čase.
- Díky svým obrovským matematickým úspěchům získal přezdívku „král amatérů“ nebo „kníže amatérů“.
- Zajímala ho především teorie čísel, hodně se věnoval prvočíslům.
- Dopisoval si se všemi významnými matematiky své doby.
- Rád matematiky „provokoval“ tím, že zformuloval nějakou matematickou větu s tím, že zná její důkaz, a nechával je tento důkaz najít samotné (pro matematiky jsou důkazy velmi důležité – bez důkazů pro ně nemají tvrzení žádnou hodnotu).
- Podobně to bylo i s Velkou Fermatovou větou, která byla nalezena v jeho pozůstalosti na okraji jedné učebnice, kde ji napsal s dovětkem, že zná nádherný důkaz, ale okraj učebnice je příliš úzký na to, aby ho sem uvedl ☺

Velká Fermatova věta

- O její důkaz se pokoušeli nejslavnější matematici více než 300 let.
- Při neúspěšných důkazech této věty se matematika posunula v mnoha směrech o hodně dál.
- Teprve asi 100 let po Fermatově smrti se podařilo Leonhardu Eulerovi dokázat část Velké Fermatovy věty – tvrzení pro n = 3 (tedy pro 3. mocniny).
- Ještě na začátku 19. století byla dokázána platnost tvrzení pouze pro n = 3, 4, 5 a 7 (a pro násobky těchto čísel), ale důkaz obecné platnosti Velké Fermatovy věty byl pořád v nedohlednu.
- Na konci 19. století vypsal německý průmyslník Paul Wolfskehl na její důkaz odměnu 100 000 marek (v přepočtu na dnešní měnu to bylo asi 60 milionů Kč) – z vděčnosti za to, že mu Velká Fermatova věta zachránila život.

Velká Fermatova věta

- Wolfskehl se totiž jako mladý nešťastně zamiloval a jeho vyvolená ho odmítla – rozhodl se proto, že spáchá sebevraždu.
- Naplánoval si datum sebevraždy tak, aby si před ní stihl dát vše do pořádku, a přesně o půlnoci se pak chtěl zastřelit.
- Protože skončil s psaním závěti před půlnocí, rozhodl se zbývající čas strávit v knihovně a začetl se do publikace, která souvisela s jedním z pokusů o důkaz Velké Fermatovy věty.
- Wolfskehl našel v této publikaci chybu a přemýšlel, jestli by ji mohl nějak opravit – to se mu nad ránem podařilo.
- A protože byl na sebe hrdý, že opravil chybu v práci jednoho z významných matematiků, přešla ho jeho sebelítost, roztrhal původní závěť a napsal novou.
- Tato závěť pak po jeho smrti v roce 1908 překvapila celou jeho rodinu dříve zmiňovaným odkazem 100 000 marek pro toho, komu se do 100 let podaří dokázat platnost Velké Fermatovy věty.

Velká Fermatova věta

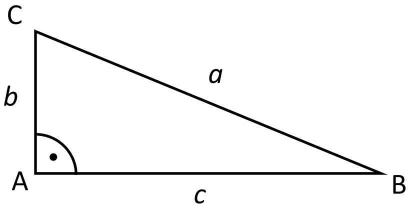
- Větu nakonec dokázal v roce 1995 anglický matematik Andrew Wiles a těsně tak stihl limit pro získání odměny (z té zbylo po inflacích asi 50 000 dolarů).
- Wiles se s Velkou Fermatovou větou setkal poprvé v 10 letech v knížce vypůjčené z knihovny.
- Zaujalo ho, že se jedná o větu, která je jednoduchá na pochopení, a přesto se ji zatím nikomu nepodařilo dokázat – Wiles se prý tehdy rozhodl, že ji jednou sám dokáže.
- Podařilo se mu to ve 42 letech (což je v matematice dost vysoký věk – matematici většinou největší objevy udělají jako hodně mladí).
- Wilesův důkaz je velmi složitý a má asi 200 stran.
- Wiles při něm využil a propojil poznatky z matematických oborů, které Fermat určitě nemohl znát.
- Většina matematiků je přesvědčena o tom, že ve Fermatově důkazu byla nějaká drobná chyba, které si nevšiml, někteří matematičtí romantici si ale myslí, že Fermat měl správný důkaz, který byl natolik geniální, že se ho dodnes nikomu dalšímu nepodařilo najít …

Zdroje:

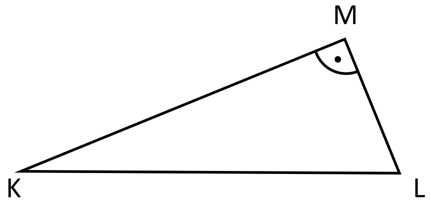
- MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*: *stručná historie královny věd*. 1. vyd. Příbram: Pistorius, 2008. ISBN 978-808-7053-164.
- SINGH, Simon. *Velká Fermatova věta*: *dramatická historie řešení největšího matematického problému*. V českém jazyce vyd. 3. , V upr. a dopl. podobě 1. Překlad Luboš Pick, Jiří Rákosník, Mirko Rokyta. Praha: Academia, 2007, 286 s. ISBN 978-80-200-1483-2.

Pythagorejské trojice – pracovní list

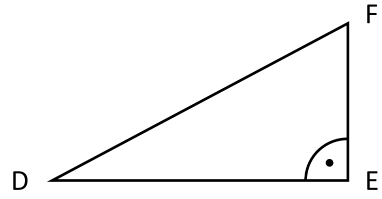
1. Popiš strany trojúhelníků a zformuluj Pythagorovu větu pro dané trojúhelníky podle vzorového příkladu:



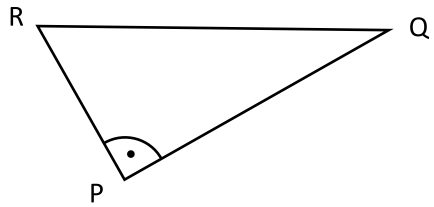
$a^2 = b^2 + c^2$



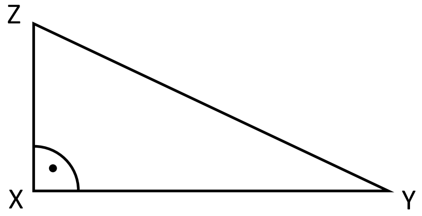
....



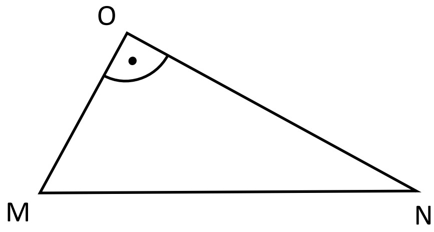
....



....



....



....

2. Doplň do tabulky pod zadané druhé mocniny jejich hodnoty. Pak zjisti, jaké jsou rozdíly mezi vedlejšími čísly, a zapiš je pod tabulku.

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2

_____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____

3. Najdi mezi čísly zapsanými pod tabulkou v předchozím příkladu ta čísla, která jsou druhými mocninami nějakých přirozených čísel, zakroužkuj je a doplň pod ně, o které mocniny se jedná (např. $81 = 9^2$).

4. Najdi s pomocí předchozích dvou úkolů dvě pythagorejské trojice = trojice přirozených čísel, pro které platí Pythagorova věta:

Rozšiřující úkoly:

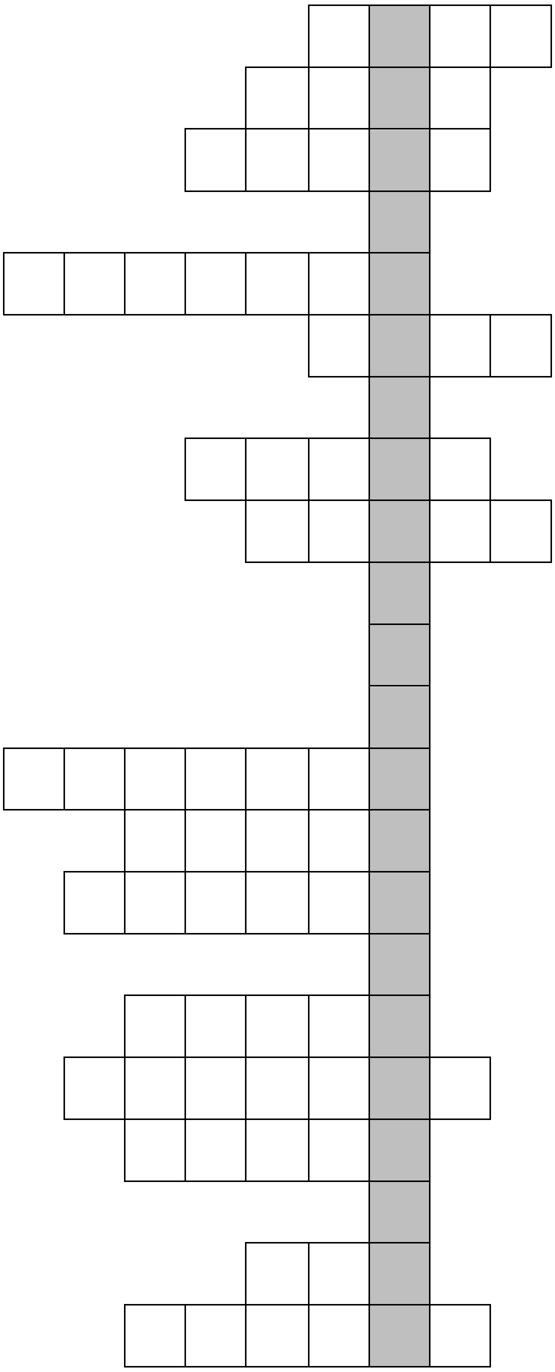
5. Všimni si v jednotlivých pythagorejských trojicích z úkolu 4. vztahu mezi dvěma většími čísly a hodnotou druhé mocniny nejmenšího čísla. Pak tohoto vztahu zkus využít k nalezení třetí pythagorejské trojice, kterou bychom mohli objevit v tabulce, kdyby měla víc sloupečků.

6. S využitím předchozích poznatků doplň ke každému z následujících čísel dvě chybějící čísla tak, aby dohromady vytvořily pythagorejskou trojici:

a) 9, , b) 11, ,

c) 13, , d) 15, ,

7. Vyřeš křížovku, v tajence najdeš jméno významného řeckého matematika (toto jméno doplň do textu pod křížovkou):



$\sqrt{49}$ =

plocha ohraničená kružnicí

vzdálenost 2 protějších stran kosočtverce

římskými číslicemi 50

úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníku se středem protější strany

jednotka objemu: 1 000 cm^3 = 1 ……….

označení průměru kružnice

velikost prostoru ohraničeného stěnami tělesa

$\sqrt{100}$ =

označení strany XY v trojúhelníku XYZ

kratší strana v pravoúhlém trojúhelníku

výsledek dělení

těleso, které má 6 stěn – shodných čtverců

římskými číslicemi 10

1^2 =

nejdelší strana v pravoúhlém trojúhelníku

součet délek všech stran mnohoúhelníku

označení poloměru kružnice

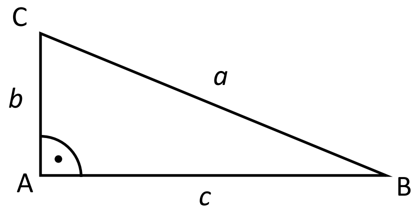
$\sqrt{9}$ =

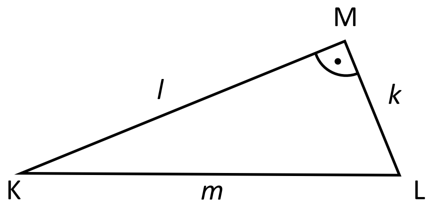
název početní operace sčítání

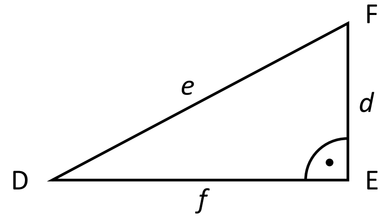
_ _ _ _ _ _ _ _ _   _   _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ (325 – 265 př. n. l.) dokázal mimo jiné to, že existuje nekonečně mnoho různých nepodobných pythagorejských trojic. Jeho důkaz byl založený na úvahách z úkolů 2. – 5. na předchozí straně. Všiml si, že rozdíly mezi po sobě jdoucími druhými mocninami přirozených čísel jsou postupně všechna lichá čísla počínaje číslem 3. Těchto lichých čísel je nekonečně mnoho, proto je mezi nimi také nekonečně mnoho těch, která jsou zároveň druhými mocninami nějakých lichých čísel. Odmocniny z těchto čísel pak vytvoří pythagorejskou trojici se dvěma čísly uvedenými nad nimi (v prvním řádku tabulky).

Pythagorejské trojice – řešení

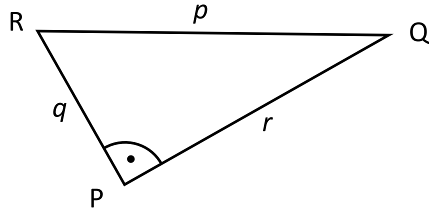
1. Popiš strany trojúhelníků a zformuluj Pythagorovu větu pro dané trojúhelníky podle vzorového příkladu:

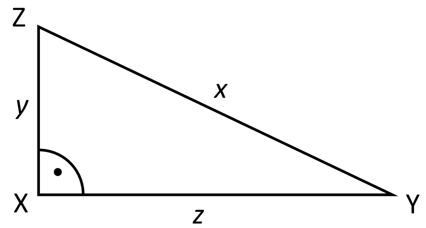


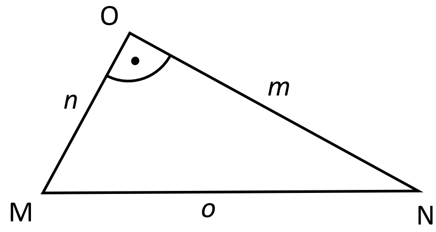




$a^2 = b^2 + c^2$ $\qquad$ $m^2 = k^2 + l^2$ $\qquad$ $e^2 = d^2 + f^2$







$p^2 = q^2 + r^2$ $\qquad$ $x^2 = y^2 + z^2$ $\qquad$ $o^2 = m^2 + n^2$

2. Doplň do tabulky pod zadané druhé mocniny jejich hodnoty. Pak zjisti, jaké jsou rozdíly mezi vedlejšími čísly, a zapiš je pod tabulku.

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

3^2 $\qquad$ 5^2

3. Najdi mezi čísly zapsanými pod tabulkou v předchozím příkladu ta čísla, která jsou druhými mocninami nějakých přirozených čísel, zakroužkuj je a doplň pod ně, o které mocniny se jedná (např. 81 = 9^2).

4. Najdi s pomocí předchozích dvou úkolů dvě pythagorejské trojice = trojice přirozených čísel, pro které platí Pythagorova věta:

3, 4, 5 $\qquad$ a $\qquad$ 5, 12, 13

Rozšiřující úkoly:

5. Všimni si v jednotlivých pythagorejských trojicích z úkolu 4. vztahu mezi dvěma většími čísly a hodnotou druhé mocniny nejmenšího čísla. Pak tohoto vztahu zkus využít k nalezení třetí pythagorejské trojice, kterou bychom mohli objevit v tabulce, kdyby měla víc sloupečků.

9 = 4 + 5, 25 = 12 + 13 (hodnota druhé mocniny je součet dvou větších čísel z pythagorejské trojice, tato dvě čísla jdou hned za sebou) → 7, 24, 25 (7^2 = 49, 49 = 24 + 25)

6. S využitím předchozích poznatků doplň ke každému z následujících čísel dvě chybějící čísla tak, aby dohromady vytvořily pythagorejskou trojici:

a) 9, 40, 41 $\qquad$ b) 11, 60, 61

c) 13, 84, 85 $\qquad$ d) 15, 112, 113

7. Vyřeš křížovku, v tajence najdeš jméno významného řeckého matematika (toto jméno doplň do textu pod křížovkou):

					s	e	d	m	$\sqrt{49}$ =
				k	r	u	h		plocha ohraničená kružnicí
			v	ý	š	k	a		vzdálenost 2 protějších stran kosočtverce
						L			římskými číslicemi 50
t	ě	ž	n	i	c	e			úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníku se středem protější strany
					l	i	t	r	jednotka objemu: 1 000 cm^3 = 1 ……….
						d			označení průměru kružnice
			o	b	j	e	m		velikost prostoru ohraničeného stěnami tělesa
				d	e	s	e	t	$\sqrt{100}$ =
						z			označení strany XY v trojúhelníku XYZ
o	d	v	ě	s	n	a			kratší strana v pravoúhlém trojúhelníku
		p	o	d	í	l			výsledek dělení
	k	r	y	ch	l	e			těleso, které má 6 stěn – shodných čtverců
						X			římskými číslicemi 10
		j	e	d	n	a			1^2 =
	p	ř	e	p	o	n	a		nejdelší strana v pravoúhlém trojúhelníku
		o	b	v	o	d			součet délek všech stran mnohoúhelníku
						r			označení poloměru kružnice
				t	ř	i			$\sqrt{9}$ =
		s	o	u	č	e	t		název početní operace sčítání

EUKLEIDES Z ALEXANDRIE (325 – 265 př. n. l.) dokázal mimo jiné to, že existuje nekonečně mnoho různých nepodobných pythagorejských trojic. Jeho důkaz byl založený na úvahách z úkolů 2. – 5. na předchozí straně. Všiml si, že rozdíly mezi po sobě jdoucími druhými mocninami přirozených čísel jsou postupně všechna lichá čísla počínaje číslem 3. Těchto lichých čísel je nekonečně mnoho, proto je mezi nimi také nekonečně mnoho těch, která jsou zároveň druhými mocninami nějakých lichých čísel. Odmocniny z těchto čísel pak vytvoří pythagorejskou trojici se dvěma čísly uvedenými nad nimi (v prvním řádku tabulky).