EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Rovnice (s jednou neznámou) s parametry

Mgr. Aleš Kobza, Ph. D.

Anotace:

Text představuje podporu k výuce celku „Rovnice a nerovnice“ na SŠ, jeho využití je předpokládáno zejména na gymnáziích.

Tento materiál se zaměřuje na učivo týkající se rovnic s parametrem. V úvodu je stručně vymezena studovaná problematika, vlastní náplň pak začíná od jednodušších – lineárních – rovnic, pokračuje s rostoucí obtížností k dalším typům rovnic (např. s neznámou ve jmenovateli, s absolutními hodnotami), které lze úpravami na rovnice lineární převést, a končí rovnicemi kvadratickými. Každá část obsahuje nejprve řešené příklady, na něž navazuje sada úloh k procvičení, která je doplněná výsledky a případnými stručnými návody k řešení těchto úloh.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Rovnice (s jednou neznámou) s parametry

Formulace problému.

Budeme se zabývat případy, kdy budeme najednou řešit více (typicky nekonečně mnoho rovnic), které se od sebe budou vzájemně lišit například jednou hodnotou - tzv. parametrem (takových parametrů může být více různých). V zadání musí být sděleno, co je parametr a co je neznámá. Cílem pak bude popsat závislost počtu a tvaru všech řešení studované rovnice v závislosti na všech přípustných hodnotách parametru.

Závěr řešení budeme uvádět v přehledné tabulce, v jejímž levém sloupci se postupně objeví všechny možné hodnoty parametru (pro rovnice s jedním parametrem tzn. číselné množiny - zápis v tomto případě nebude obsahovat proměnné) a v pravém sloupci pak zapíšeme, jak vypadá v dané situaci tvar množiny všech kořenů K (v pravém sloupci je tedy zápis se závislostí na parametru možný). Bude-li přitom v příslušném řádku vystupovat jediná hodnota parametru, pak nebude v tomto řádku parametr vystupovat v množině kořenů (za tuto konkrétní hodnotu dosadíme a vyčíslíme). Pokud je v jistém řádku více hodnot parametru, může se objevit (nevyčíslená) hodnota parametru i v zápisu příslušných kořenů.

Rovnice s parametry - lineární

V této části textu bude pozornost věnována nejprve lineárním rovnicím s parametry, s přibývající obtížností pak rovnicím, které vedou k řešení lineárních rovnic s parametry. Konkrétní postup bude objasněn nejprve pomocí řešených příkladů, na které naváží úlohy k procvičení.

Řešené příklady.

1. /příklad *lineární rovnice*/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$p^2(x-1) = 5(px-5) \ ,$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Výrazy s x shromáždíme na jedné straně rovnice, zbylé na druhé straně

$$p^2x - 5px = p^2 - 25 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(p^2 - 5p\right) = p^2 - 25 \quad \Leftrightarrow \quad xp(p-5) = (p-5)(p+5) \ .$$

Abychom na levé straně osamostatnili x, potřebovali bychom vydělit rovnici výrazem $p(p-5)$. To je však možné provést jedině za podmínky, že $p(p-5) \neq 0$. Pokud naopak $p(p-5) = 0$, dělit nemůžeme a musíme chování rovnice pro příslušné hodnoty paametru prozkoumat samostatně. Řešení se nám tak rozdělí do tří větví:

a) Pokud $p \in \mathbb{R} - \{0; 5\}$, platí

$$xp(p-5) = (p-5)(p+5) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{(p-5)(p+5)}{p(p-5)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{p+5}{p} \,,$$

takže má rovnice pro libovolnou z uvedených hodnot p vždy právě jedno řešení. Jde o více případů, výsledek tedy závisí na p.

b) Jestliže $p = 0$, po dosazení dostáváme

$$0x = -25 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -25 \,,$$

což je spor. Pro $p = 0$ tedy rovnice žádné řešení nemá.

c) Konečně ve zbývající situaci když $p = 5$, po dosazení obdržíme

$$0x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0 \,,$$

což platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V tomto případě tedy má rovnice nekonečně mnoho řešení.

Výše uvedená zjištění shrneme do tabulky, která představuje závěr výpočtu:

p	K
$\mathbb{R} - \{0; 5\}$	$\left\{\frac{p+5}{p}\right\}$
$\{0\}$	$\emptyset$
$\{5\}$	$\mathbb{R}$

2. /příklad *lineární rovnice* se dvěma parametry/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{x+a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x-b}{a} + \frac{a}{b}\,,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry a x neznámá.

Řešení. Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, rovnice nemá smysl. Pro $ab \neq 0$ můžeme rovnici ekvivalentně upravovat

$$(x+a)\,a - b^2 = (x-b)\,b + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(a-b) = a^2 - b^2 - a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(a-b) = 0\,.$$

a) Je-li $a \neq b$, pak můžeme rovnici vydělit nenulovým výrazem $a - b$, čímž vypočteme, že $x = 0$.

b) Pokud $a = b$, je rovnice tvaru $0x = 0$ a je tedy splněna pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Závěr jako obvykle zapíšeme do tabulky

a, b	K
$\{(a,b)\,,$ kde $a = 0$ nebo $b = 0\}$	nemá smysl
$\{(a,b)\,,$ kde $a = b \neq 0\}$	$\mathbb{R}$
$\{(a,b)\,,$ kde $0 \neq a \neq b \neq 0\}$	$\{0\}$

3. /příklad *rovnice s neznámou ve jmenovateli* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m}\,,$$

kde $m \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Všimněme si nejprve nutných podmínek $x \neq 0$ a $m \neq 0$. Tu druhou vyhodnotíme hned. Znamená to, že v případě, kdy $m = 0$ zadaná rovnice nemá smysl. Podmínku $x \neq 0$ však budeme muset analyzovat až v závěru výpočtu. Za uvedených podmínek tedy platí

$$\frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 4 = mx - 2x \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)\,(m+2) = x\,(m-2)\;.$$

Podobně jako v předchozí úloze se nám nyní další postup rozvětví.

a) Pro $m \in \mathbb{R} - \{0; 2\}$ platí

$$(m-2)\,(m+2) = x\,(m-2) \quad \Leftrightarrow \quad x = m+2\,,$$

tudíž má řešená rovnice nejvýše jedno řešení. Než učiníme závěr, je potřeba zkontrolovat, zda skutečně platí $x \neq 0$. To tedy znamená, že musí být splněno $0 \neq m + 2$, takže $m \neq -2$.

b) V situaci, kdy $m = 2$ po dosaení dostáváme

$$0 \cdot 4 = x \cdot 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0\,,$$

takže v této větvi vyhoví všechna $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Než napíšeme výsledky do tabulky, všimněme si ještě jedné skutečnosti. Zjistili jsme, že rovnice nemá řešení pro $m \in \{-2; 0\}$. Přesto tyto případy v tabulce nenapíšeme do jednoho řádku. Je mezi nimi totiž rozdíl! Pro $m = -2$ lze rovnici uvažovat, řešit ji a následně tak vypočteme, že nemá žádné řešení. Pro $m = 0$ však rovnice vůbec není definována a nemá smysl ji ani uvažovat. V dalším tedy budeme takové případy rozlišovat a oddělovat.

m	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{2\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\{-2\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R} - \{0; \pm 2\}$	$\{m + 2\}$

4. /příklad *rovnice s neznámou ve jmenovateli* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$a = \frac{2 + ax}{a + x}\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Rovnice má smysl za podmínky $x \neq -a$, kterou dále ve výpočtu zohledníme. Při jejím splnění platí

$$a = \frac{2 + ax}{a + x} \quad \Leftrightarrow \quad a\,(a + x) = 2 + ax \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2\,.$$

a) Pro $a \neq \pm\sqrt{2}$ tedy řešená rovnice nemá řešení.

b) Když $a = \sqrt{2}$, je jejím řešením jakékoliv $x \in \mathbb{R}$, pro něž $x \neq -a$, tedy $x \in \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}\right\}$.

c) Podobně pokud $a = -\sqrt{2}$, vyhoví rovnici ta $x \in \mathbb{R}$, pro něž $x \neq -a$, tedy $x \in \mathbb{R} - \left\{\sqrt{2}\right\}$.

Závěr ještě zapíšeme tabulkou:

a	K
$\mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$	$\emptyset$
$\left\{\sqrt{2}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}\right\}$
$\left\{-\sqrt{2}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{\sqrt{2}\right\}$

5. /příklad *rovnice s neznámou pod odmocninou* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - a\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Zadanou rovnici nejprve umocníme na druhou, což je obecně důsledková úprava. Následně vyhodnotíme, zda bude snazší provést zkoušku, nebo stanovit podmínky, které zajistí ekvivalentnost použitých úprav. Platí

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - a \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = (x - a)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = x^2 - 2ax + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2ax = a^2 + 1\,.$$

Nyní rozlišíme dva případy:

a) Je-li $a \neq 0$, pak

$$2ax = a^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a^2 + 1}{2a}\,.$$

Stanovovat podmínky by znamenalo jednak posoudit, kdy je rovnice definovaná, tedy zjistit, kdy platí

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{tzn.} \quad \left(\frac{a^2 + 1}{2a}\right)^2 - 1 \geq 0$$

a dále určit, kdy při umocnění byla i pravá strana nezáporná, což představuje podmínku

$$x - a \geq 0 \quad \text{tzn.} \quad \frac{a^2+1}{2a} - a \geq 0\,.$$

Domnívám se, že v této situaci je jednodušší provést zkoušku

$$L\left(\frac{a^2+1}{2a}\right) = \sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{4a^2} - 1} = \sqrt{\frac{a^4+2a^2+1-4a^2}{4a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}} = \sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2} = \left|\frac{a^2-1}{2a}\right|\,,$$

$$P\left(\frac{a^2+1}{2a}\right) = \frac{a^2+1}{2a} - a = \frac{a^2+1-2a^2}{2a} = \frac{1-a^2}{2a} = -\frac{a^2-1}{2a}\,.$$

Rovnice má tedy řešení, pokud se rovnají výrazy

$$\left|\frac{a^2-1}{2a}\right| = -\frac{a^2-1}{2a}\,.$$

Víme, že

$$|z| = -z \quad \Leftrightarrow \quad z \leq 0\,,$$

takže požadovaná podmínka je splněna právě tehdy, když

$$\frac{a^2-1}{2a} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(a-1)(a+1)}{a} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle\,.$$

b) Pokud $a = 0$, je řešená rovnice tvaru $0x = 1$, což evidentně pro žádné $x \in \mathbb{R}$ neplatí.

Výše uvedená zjištění opět promítneme do výsledné tabulky:

a	K
$(-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle$	$\left\{\frac{a^2+1}{2a}\right\}$
$(-1; 0\rangle \cup (1; \infty)$	$\emptyset$

6. /příklad *rovnice s neznámou v absolutní hodnotě* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$|x + 3k| = |x - k|\,,$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Všimněme si, že obě strany zadané rovnice jsou díky absolutní hodnotě nezáporné. Rovnici tedy můžeme umocnit na druhou, což je v této situaci dokonce ekvivalentní úprava, kterou se zbavíme absoluních hodnot a navíc po úpravě (vzhledem ke stejným koeficientům u x) dostaneme dokonce lineární rovnici. Tento postup řešení tedy bude velice výhodný a rychlý! Platí tak

$$|x+3k| = |x-k| \quad \Leftrightarrow \quad |x+3k|^2 = |x-k|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+6kx+9k^2 = x^2-2kx+k^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 8kx = -8k^2 \quad \Leftrightarrow \quad kx = -k^2\,.$$

a) Pokud $k \neq 0$, dostaneme po vydělení rovnice číslem k

$$kx = -k^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -k\,,$$

což znamená, že rovnice má jediné řešení.

b) Když $k = 0$, vidíme po dosazení, že $0x = 0$, což je splněno pro jakékoliv $x \in \mathbb{R}$.

Získáváme tak závěr:

k	K
$\mathbb{R} - \{0\}$	$\{-k\}$
$\{0\}$	$\mathbb{R}$

7. /příklad *rovnice s neznámou v absolutní hodnotě* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{2y-1}{|y+b|} + 3 = 0\,,$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je parametr a y neznámá.

Řešení. Aby ve jmenovateli zlomku nebyla nula, je nutné a stačí, aby $y \neq -b$. Při splnění této podmínky se lze ekvivalentní úpravou zbavit zlomku

$$\frac{2y-1}{|y+b|} + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 1 = -3\,|y+b|\ .$$

Při odstranění absolutní hodnoty se nám řešení uvažované rovnice rozvětví:

a) Když $y + b < 0$ (tzn. $y < -b$), pak $|y+b| = -y - b$, takže

$$2y - 1 = -3\,|y+b| \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 1 = -3\,(-y-b) \quad \Leftrightarrow \quad -3b - 1 = y\,.$$

Nyní je třeba se podívat, kdy bude splněna podmínka $y < -b$, která nás k nalezenému řešení přivedla. Platí

$$y < -b \quad \Leftrightarrow \quad -3b - 1 < -b \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 2b \quad \Leftrightarrow \quad b > -\frac{1}{2}\,.$$

b) Jestliže $y + b > 0$ (tzn. $y > -b$), pak $|y+b| = y + b$, tudíž

$$2y - 1 = -3\,|y+b| \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 1 = -3\,(y+b) \quad \Leftrightarrow \quad 5y = 1 - 3b \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1-3b}{5}\,.$$

Zbývá zjistit, kdy skutečně platí $y > -b$. Dostáváme

$$y > -b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-3b}{5} > -b \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 3b > -5b \quad \Leftrightarrow \quad 2b > -1 \quad \Leftrightarrow \quad b > -\frac{1}{2}\,.$$

V obou větvích řešení jsme obdrželi podmínku $b > -\frac{1}{2}$. Zbývá se podívat, zda pro všechna taková b máme vždy skutečně 2 různá řešení. Hledejme tedy b, pro která by obě řešení byla totožná:

$$-3b - 1 = \frac{1-3b}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -15b - 5 = 1 - 3b \quad \Leftrightarrow \quad -6 = 12b \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{1}{2}\,,$$

což je hodnota, která podmínku $b > -\frac{1}{2}$ nesplňuje. Vidíme tedy, že naše rovnice má řešení buď právě dvbě, nebo žádné:

b	K
$\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$	$\left\{-3b-1; \frac{1-3b}{5}\right\}$
$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle$	$\emptyset$

Zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$

1.
$$3px - 12 = (p+2)\,x\,,$$

2.
$$x\,(x+p) + x\,(x-p) = 2\,(x+p)^2\ ,$$

3.
$$\frac{x+p}{p} = px - 1\,,$$

4.
$$px - \frac{2}{p^2} = \frac{1}{p}\,(4x+1)\ ,$$

5.
$$\frac{p^2\,(x-1)}{px-3} = 3\,,$$

6.
$$\frac{p}{x} - \frac{1}{px} = 1 - \frac{1}{p}\,,$$

7.
$$2p = \frac{2+px}{p+x}\,,$$

8.
$$\sqrt{x^2+p^2} = p + x\,,$$

9.
$$\sqrt{x^2+p} = p - x\,,$$

10.
$$1 + \sqrt{x} = \sqrt{x-p}\,,$$

11.
$$|x+5-p| = |x-2|\ ,$$

12.
$$|2x-p| + x + 1 = 0\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1.

p	K
$\{1\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{1\}$	$\left\{\frac{6}{p-1}\right\}$

,

2.

p	K
$\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$\left\{-\frac{p}{2}\right\}$

,

3.

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{\pm 1\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{0;\pm 1\}$	$\left\{\frac{2p}{p^2-1}\right\}$

,

4.

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{2\}$	$\emptyset$
$\{-2\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}-\{0;\pm 2\}$	$\left\{\frac{1}{p^2-2p}\right\}$

,

5.

p	K
$\{0\}$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\mathbb{R}-\{1\}$
$\mathbb{R}-\{0;3\}$	$\left\{\frac{p+3}{p}\right\}$

, nezapomeňte zkontrolovat splnění podmínky $px \neq 3$, ta pro nalezené $x = \frac{p+3}{p}$ vede ke zjištění, že $p \neq 0$, takže se „neprojeví“, ale bez výpočtu na to nelze spoléhat... (v situaci pro $p = 3$ se tato podmínka uplatnila zjištěním, že $x \neq 1$),

6.

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{1\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$\{-1\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{0;\pm 1\}$	$\{p+1\}$

, nezapomeňte zkontrolovat splnění podmínky $x \neq 0$,

7.

p	K
$\left\{0;\pm\sqrt{2}\right\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\left\{0;\pm\sqrt{2}\right\}$	$\left\{\frac{2-2p^2}{p}\right\}$

, speciální případy pro hodnoty $p = \pm\sqrt{2}$ se objeví analýzou podmínky $x \neq -p$,

8.

p	K
$\{0\}$	$\langle 0;\infty)$
$(-\infty;0)$	$\emptyset$
$(0;\infty)$	$\{0\}$

, při provádění zkoušky vychází

$$L(0) = \sqrt{p^2} = |p| \quad \Rightarrow \quad L(0) = P(0) \quad \Leftrightarrow \quad p \geq 0\,,$$

9.

p	K
$\{0\}$	$(-\infty;0\rangle$
$(-\infty;-1)$	$\emptyset$
$\langle -1;0)\cup(0;\infty)$	$\left\{\frac{p-1}{2}\right\}$

, při provádění zkoušky vychází

$$L\left(\frac{p-1}{2}\right)=\frac{|p+1|}{2}\quad\Rightarrow\quad L\left(\frac{p-1}{2}\right)=P\left(\frac{p-1}{2}\right)\quad\Leftrightarrow\quad p\geq -1\,,p\neq 0\,,$$

10.

p	K
$(-1;\infty)$	$\emptyset$
$(-\infty;-1\rangle$	$\left\{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right\}$

,při provádění zkoušky vychází

$$L\left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right)=P\left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right)\quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{|p+1|}{2}=\frac{|p-1|}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\ldots\quad\Leftrightarrow\quad p\in(-\infty;-1\rangle\ ,$$

11.

p	K
$\{7\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}-\{7\}$	$\left\{\frac{p-3}{2}\right\}$

, řešenou rovnici je výhodné umocnit, jde o její ekvivalentní úpravu (postup je podobný jako v Př. 6),

12.

p	K
$(-\infty;-2)$	$\left\{p+1;\frac{p-1}{3}\right\}$
$\{-2\}$	$\{-1\}$
$(-2;\infty)$	$\emptyset$

, na případ $p=-2$ narazíme řešením rovnice

$$p+1=\frac{p-1}{3}\,,$$

čímž zjistíme, kdy příslušná množina není dvouprvková (postup je podobný jako v Př. 7).

Rovnice s parametry - kvadratické

Postup řešení kvadratické rovnice s parametrem.

1. Pokud koeficient u kvadratického členu může být nulový, vyřešíme zvlášť případ lineární rovnice.
2. Dále se zabýváme rovnicí, která je „skutečně“ kvadratická. Vypočteme tedy její diskriminant D a budeme zkoumat jeho znaménko. Tím se nám další postup může rozdělit až do tří větví.
   a) Pro $D > 0$ má rovnice dva reálné různé kořeny. Najdeme je užitím známého vzorce.
   b) Když $D = 0$, má rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen.
   c) Je-li $D < 0$, nemá rovnice v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

V některých úlohách může být úkolem nalézt všechny hodnoty parametru, pro něž má rovnice dva reálné různé kořeny, které jsou například

1. různých znamének (tzn. jeden kladný a druhý záporný),
2. oba kladné,
3. oba záporné.

Probereme tedy ještě obecně způsob řešení takové úlohy. Pro všechny tři uvedené varianty je společná úvodní dvojice podmínek - rovnice musí být kvadratická (tedy koeficient u kvadratického členu nesmí být nulový) a diskriminant musí být kladný. K dalšímu postupu využijeme Viètovy vztahy. Ke splnění jednotlivých požadovaných podmínek (při současném splnění obou právě zmíněných „společných“ podmínek) je v příslušných variantách nutné a stačí, aby

1. $x_1x_2 < 0$,
2. $x_1x_2 > 0$ a $x_1 + x_2 > 0$,
3. $x_1x_2 > 0$ a $x_1 + x_2 < 0$,

přičemž výrazy x_1x_2 a x_1+x_2 umíme díky Viètovým vztahům vyjádřit pomocí koeficientů zadané rovnice. (viz Příklad 5)

Řešené příklady.

1. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici
$$px^2 + 6p^2x + p = 0\,,$$
kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

   Řešení. Nejprve probereme případ, kdy je zadaná rovnice pouze lineární, v naší situaci to je za podmínky $p = 0$ (1. bod postupu). Po dosazení dostáváme pravdivé tvrzení $0 = 0$, takže rovnice je splněna pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Dále předpokládejme, že $p \neq 0$. Pracujeme tedy s kvadratickou rovnicí a vypočteme její diskriminant (2. bod postupu s následným větvením). Platí
$$D = \left(6p^2\right)^2 - 4p \cdot p = 36p^4 - 4p^2 = 4p^2\left(9p^2 - 1\right) = 4p^2\left(3p-1\right)\left(3p+1\right)\,.$$
   a) Zjišťujeme, že $D > 0$ právě tehdy, když $p \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$. Potom
$$x_{1,2} = \frac{-6p^2 \pm 2p\sqrt{9p^2-1}}{2p} = -3p \pm \sqrt{9p^2-1}\,.$$
   b) Dále $D = 0$ tehdy a jen tehdy, když $p = \pm\frac{1}{3}$ (uvědomme si, že pracujeme v situaci, kdy $p \neq 0$). Pak
$$x = \frac{-6p^2}{2p} = -3p\,.$$

c) Konečně $D < 0$ když a jen, když $p \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) - \{0\}$. V této situaci rovnice nemá řešení.

Závěrečná tabulka tedy vypadá takto:

p	K
$\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$	$\left\{-3p \pm \sqrt{9p^2 - 1}\right\}$
$\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$	$\{-3p\}$
$\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) - \{0\}$	$\emptyset$

Zdůrazněme ještě raději logiku zápisu v právě uvedené tabulce. Přestože pro $p = \pm\frac{1}{3}$ platí

$$-3p \pm \sqrt{9p^2 - 1} = -3p$$

a bylo by možné výsledek ve třetím řádku pod záhlavím tabulky chápat jako speciální případ výrazu ve druhém řádku, nebylo by správné zápis takto „zjednodušit“ a psát, že pro $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{1}{3}; \infty\right)$ je množina všech kořenů tvaru $\left\{-3p \pm \sqrt{9p^2 - 1}\right\}$. Důvodem je to, že v naší tabulce správně rozlišujeme, kdy má rovnice dva kořeny (druhý řádek) a kdy jeden kořen (třetí řádek). Tuto informaci by „zjednodušený“ zápis přímo neposkytoval.

2. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\left(q^2 - 1\right) x^2 + 2qx + 1 = 0\,,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Nejprve probereme případ, kdy je zadaná rovnice jenom lineární. To nastává pro $q = \pm 1$ (1. bod postupu). Po vydělení rovnice (nenulovým) číslem $2q$ pak dostáváme

$$2qx + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2q}\,.$$

Za podmínky $q \neq \pm 1$ je pak řešená rovnice kvadratická a budeme nejprve počítat její diskriminant (2. bod postupu)

$$D = (2q)^2 - 4\left(q^2 - 1\right) = 4 > 0\,.$$

V této situaci se řešení dále nevětví (případy $D = 0$ ani $D < 0$ nemohou nastat). Dále vypočteme

$$x_{1,2} = \frac{-2q \pm 2}{2\left(q^2 - 1\right)} = \frac{-q \pm 1}{(q-1)(q+1)} = \begin{cases} -\frac{1}{q+1} \\ -\frac{1}{q-1} \end{cases}$$

a dostáváme tak závěr:

q	K
$\{\pm 1\}$	$\left\{-\frac{1}{2q}\right\}$
$\mathbb{R} - \{\pm 1\}$	$\left\{-\frac{1}{q+1}; -\frac{1}{q-1}\right\}$

Vidíme, že řešená rovnice má pro jakoukoliv hodnotu parametru q alespoň jedno řešení.

3. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$(a-2)\,x^2 - \left(a^2 - 2a + 2\right) x + 2a = 0\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Nejprve probereme případ, kdy je zadaná rovnice pouze lineární. Dochází k tomu, když $a = 2$ (1. bod postupu). Dostáváme tak

$$0x^2 - (4 - 4 + 2)\,x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\,.$$

Nyní se zaměříme na případ, kdy $a \neq 2$ (2. bod postupu). Počítejme diskriminant kvadratické rovnice a pro formální zjednodušení výpočtu přitom zaveďme substituci $b = a^2 - 2a$

$$D = \left[-\left(a^2 - 2a + 2\right)\right]^2 - 4\,(a-2)\cdot 2a = \left[\left(a^2 - 2a\right) + 2\right]^2 - 8\left(a^2 - 2a\right) = (b+2)^2 - 8b =$$

$$= b^2 + 4b + 4 - 8b = b^2 - 4b + 4 = (b-2)^2 = \left(a^2 - 2a - 2\right)^2 \geq 0\,.$$

Vidíme, že bude třeba rozlišit dva případy.

a) Vyřešením rovnice $a^2 - 2a - 2 = 0$ (propočítejte si sami) zjišťujeme, že varianta $D = 0$ nastává právě tehdy, když $a = 1 \pm \sqrt{3}$. Řešená rovnice má v tomto případě jeden kořen, a to

$$x = \frac{a^2 - 2a + 2}{2\,(a-2)}\,.$$

b) Ve zbývajících případech, tj. pro $a \in \mathbb{R} - \left\{2; 1 \pm \sqrt{3}\right\}$ je $D > 0$ a řešená rovnice má dva různé reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{a^2 - 2a + 2 \pm (a^2 - 2a - 2)}{2\,(a-2)} = \begin{cases} \frac{2a^2-4a}{2(a-2)} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a \\ \frac{4}{2(a-2)} = \frac{2}{a-2} \end{cases}.$$

Výpočet uzavřeme zápisem výsledné tabulky:

a	K
$\{2\}$	$\{2\}$
$\left\{1 \pm \sqrt{3}\right\}$	$\left\{\frac{a^2-2a+2}{2(a-2)}\right\}$
$\mathbb{R} - \left\{2; 1 \pm \sqrt{3}\right\}$	$\left\{a; \frac{2}{a-2}\right\}$

4. Najděte tu hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$, pro kterou má rovnice

$$x^2 + (p-1)\,x + 2p^2 = 0$$

dva reálné různé kořeny, jejichž součin je nejmenší možný.

Řešení. Podle Viètových vztahů platí

$$x_1 x_2 = 2p^2 \geq 0\,.$$

Nejmenší možná hodnota takového součinu je 0 a nastává pro $p = 0$. (Získaná nerovnost říká, že součin žádných dvou kořenů zadané rovnice tedy nemůže být záporný.) Zbývá ověřit, zda pro tuto hodnotu má uvažovaná rovnice dva reálné kořeny. Můžeme buď dosadit $p = 0$ a rovnici vyřešit nebo jen spočítat její diskriminant a zjistit, zda je pro $p = 0$ kladný. Při prvním způsobu řešení ihned vidíme, že

$$x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{a} \quad x_2 = 1\,,$$

takže hodnota $p = 0$ našemu zadání vyhovuje.

5. Uvažujme rovnici

$$(2a-6)\,x^2 + 2ax + a + 4 = 0\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr a $x \in \mathbb{R}$ neznámá. Najděte všechny hodnoty parametru a, pro něž má tato rovnice dva reálné různé kořeny, které jsou

a) různých znamének (tzn. jeden kladný a druhý záporný),

b) oba kladné,

c) oba záporné.

Řešení. Nejprve analyzujeme obě společné podmínky, které jsou nutné pro každou z vyšetřovaných vlastností:

- Rovnice musí být kvadratická, koeficient u kvadratického členu nesmí být nulový

$$2a - 6 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 3\,.$$

- Diskriminant této rovnice musí být kladný, takže

$$D = (2a)^2 - 4\,(2a-6)\,(a+4) = 4a^2 - 8a^2 - 8a + 96 = -4a^2 - 8a + 96 =$$

$$= -4\left(a^2 + 2a - 24\right) = -4\,(a+6)\,(a-4)\,, \quad \text{proto} \quad D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-6;4) - \{3\}\,. \qquad (1)$$

Nyní se již můžeme odděleně pustit do řešení jednotlivých částí úlohy s využitím Viètových vztahů.

a) Potřebujeme, aby $x_1x_2 < 0$, to znamená, že

$$\frac{a+4}{2a-6} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+4}{a-3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-4;3)\,.$$

Protože všechny zmíněné podmínky musí platit současně, zbává udělat průnik příslušných intervalů. Tím zjišťujeme, že rovnice má jeden kladný a druhý záporný kořen právě tehdy, když $a \in (-4;3)$.

b) Nyní je třeba, aby $x_1x_2 > 0$ a $x_1 + x_2 > 0$, takže

$$\frac{a+4}{2a-6} > 0 \quad \text{a} \quad -\frac{2a}{2a-6} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+4}{a-3} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{a}{a-3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \emptyset\,.$$

Vidíme, že tyto podmínky současně splnit nelze. Znamená to, že řešená rovnice nikdy nemá dva kladné reálné různé kořeny.

c) Nyní je třeba, aby $x_1x_2 > 0$ a $x_1 + x_2 < 0$, takže

$$\frac{a+4}{2a-6} > 0 \quad \text{a} \quad -\frac{2a}{2a-6} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+4}{a-3} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{a}{a-3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty;-4)\cup(3;\infty)\,.$$

Po provedení průniku této podmínky s podmínkou (1) získáváme závěr, že uvažovaná rovnice má dva různé záporné kořeny když a jen, když $a \in (-6;-4) \cup (3;4)$.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$

   a)

$$x^2 - 2px + 3p^2 = 0\,,$$

b)

$$2p^2x^2 + 4p^2x + 3 + 2p^2 = 0\,,$$

c)

$$x^2 + 4x + p = 0\,,$$

d)

$$px^2 + (2p+1)\,x + p - 4 = 0\,,$$

e)

$$x^2 - 2\,(p+1)\,x + 4p = 0\,,$$

f)

$$p\left(x^2 + 2px\right) = 3x + 6p\,,$$

g)

$$(p+3)\,x^2 - 2px + 4 = 8x\,,$$

h)

$$px^2 - 2px - p + 3 = 0\,.$$

2. Najděte tu hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$, pro kterou má rovnice

$$x^2 - \left(p^2 - 2p + 3\right)x - p = 0$$

dva reálné různé kořeny, jejichž součet je nejmenší možný.

U každé z následujících rovnic

3.

$$x^2 + 2\,(p-4)\,x + p^2 + 6p = 0\,,$$

4.

$$px^2 + 2px = 2x - 1 - p\,,$$

5.

$$x^2 - 2x + p^2 = 0$$

určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby příslušná rovnice

a) neměla žádný reálný kořen,
b) měla právě jeden reálný kořen,
c) měla jeden kladný a jeden záporný kořen,
d) měla dva kladné reálné různé kořeny,
e) měla dva záporné reálné různé kořeny.

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a)

p	K
$\{0\}$	$\{0\}$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$\emptyset$

, (vždy kvadratická rovnice, $D=-8p^2\leq 0$),

b)

p	K
$\mathbb{R}$	$\emptyset$

, (pro $p=0$ lineární rovnice, která nemá řešení, pro $p\neq 0$ $D=-24p^2<0$),

c)

p	K
$(-\infty;4)$	$\left\{-2\pm\sqrt{4-p}\right\}$
$\{4\}$	$\{-2\}$
$(4;\infty)$	$\emptyset$

, (vždy kvadratická rovnice, $D=16-4p$),

d)

p	K
$\{0\}$	$\{4\}$
$\left\{-\frac{1}{20}\right\}$	$\{9\}$
$\left(-\infty;-\frac{1}{20}\right)$	$\emptyset$
$\left(-\frac{1}{20};0\right)\cup(0;\infty)$	$\left\{\frac{-2p-1\pm\sqrt{20p+1}}{2p}\right\}$

, (pro $p=0$ lineární rovnice, která má jediné řešení, pro $p\neq 0$ $D=20p+1$),

e)

p	K
$\{1\}$	$\{2\}$
$\mathbb{R}-\{1\}$	$\{2;2p\}$

, (vždy kvadratická rovnice, $D=[2(p-1)]^2\geq 0$),

f)

p	K
$\{0\}$	$\{0\}$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$\left\{-2p;\frac{3}{p}\right\}$

, (pro $p=0$ lineární rovnice s jediným řešením, pro $p\neq 0$ $D=\left(2p^2+3\right)^2>0$),

g)

p	K
$\{-3;-2\}$	$\{2\}$
$\mathbb{R}-\{-3;-2\}$	$\left\{2;\frac{2}{p+3}\right\}$

, (pro $p=-3$ lineární rovnice, která má jediné řešení (to navíc vychází stejně jako v případě, kdy $D=0$), pro $p\neq -3$ $D=[2(p+2)]^2\geq 0$),

h)

p	K
$(-\infty;0)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right)$	$\left\{\frac{p\pm\sqrt{2p^2-3p}}{p}\right\}$
$\left\{\frac{3}{2}\right\}$	$\{1\}$
$\left\langle 0;\frac{3}{2}\right)$	$\emptyset$

, (pro $p=0$ lineární rovnice, která nemá řešení, pro $p\neq 0$ $D=4p(2p-3)$).

2. Podle Viètových vztahů platí

$$x_1+x_2=p^2-2p+3=(p-1)^2+2\geq 2\,.$$

Po ověření, že pro $p=1$ má rovnice kladný diskriminant můžeme tvrdit, že pro $p=1$ se realizuje nejmenší možný součet reálných různých kořenů uvažované rovnice, a to 2.

3. Rovnice je vždy kvadratická, rovnou počítáme její diskriminant. Ten vychází $D=-56p+64$.

   a) Nastává pro $D<0$, tedy pro $p\in\left(\frac{8}{7};\infty\right)$.

   b) Nastává pro $D=0$, tedy pro $p=\frac{8}{7}$.

   Další případy mohou nastat jedině pro $p<\frac{8}{7}$ při splnění následujících podmínek:

c) $x_1x_2 = p^2 + 6p = p(p+6) < 0$, tedy pro $p \in (-6; 0)$.

Pro splnění zbývajících podmínek je dále nutné, aby $x_1x_2 = p^2 + 6p = p(p+6) > 0$, tedy pro $p \in (-\infty; -6) \cup \left(0; \frac{8}{7}\right)$. Dále musí ještě platit:

d) $x_1 + x_2 = -2(p-4) > 0$, tedy $p < 4$. To při zohlednění předchozí podmínky znamená, závěr že $p \in (-\infty; -6) \cup \left(0; \frac{8}{7}\right)$.

e) $x_1 + x_2 = -2(p-4) < 0$, tedy $p > 4$. Ovšem to vzhledem k předchozí podmínce nemůže nastat nikdy.

4. Rovnici upravíme do tvaru

$$px^2 + 2(p-1)x + p + 1 = 0$$

a nejprve posoudíme její lineární případ pro $p = 0$. V této situaci má jediné řešení ($x = \frac{1}{2}$). Dále se zabývejme rovnicí kvadratickou, tedy pro $p \neq 0$. Její diskriminant vychází $D = 4(1-3p)$.

a) Nastává pro $D < 0$, tedy pro $p \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$.

b) Nastává pro lineární případ rovnice nebo pro kvadratickou rovnici s nulovým diskriminantem, tedy pro $p \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$.

Další případy mohou nastat jedině pro $p < \frac{1}{3}$ a $p \neq 0$ při splnění následujících podmínek:

c) $x_1x_2 = \frac{p+1}{p} < 0$, tedy pro $p \in (-1; 0)$.

Pro splnění zbývajících podmínek je dále nutné, aby $x_1x_2 = \frac{p+1}{p} > 0$, tedy pro $p \in (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Dále musí ještě platit:

d) $x_1 + x_2 = -\frac{2(p-1)}{p} > 0$, tedy $\frac{p-1}{p} < 0$. To při zohlednění předchozí podmínky znamená závěr, že $p \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

e) $x_1 + x_2 = -\frac{2(p-1)}{p} < 0$, tedy $\frac{p-1}{p} > 0$. To při zohlednění předchozí podmínky znamená závěr, že $p \in (-\infty; -1)$.

5. Rovnice je vždy kvadratická, rovnou počítáme její diskriminant. Ten vychází $D = 4(1-p^2) = 4(1-p)(1+p)$.

a) Nastává pro $D < 0$, tedy pro $p \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

b) Nastává pro $D = 0$, tedy pro $p = \pm 1$.

Další případy mohou nastat jedině pro $p \in (-1; 1)$ při splnění následujících podmínek:

c) $x_1x_2 = p^2 < 0$, což nemůže nastat nikdy.

Pro splnění zbývajících podmínek je dále nutné, aby $x_1x_2 = p^2 > 0$, tedy pro $p \in (-1; 1) - \{0\}$. Dále musí ještě platit:

d) $x_1 + x_2 = 2 > 0$, což je splněno pro všechna $p \in (-1; 1) - \{0\}$.

e) $x_1 + x_2 = 2 < 0$, takže tento případ nastat nemůže.