EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Vybrané typy rovnic s jednou neznámou

Mgr. Aleš Kobza, Ph. D.

Anotace:

Text představuje podporu k výuce celku „Rovnice a nerovnice“ na SŠ, jeho využití je předpokládáno zejména na gymnáziích.

Tento materiál se zaměřuje na části „Kvadratické rovnice“ (včetně problematiky vztahů mezi kořeny a koeficienty takové rovnice) a „Rovnice s neznámou pod odmocninou“. Obsahuje jednak teoretický základ (včetně zdůvodnění platnosti uváděných tvrzení, či vysvětlení používaných postupů), následuje část s řešenými příklady, na níž navazuje sada úloh k procvičení, která je doplněná výsledky a případnými stručnými návody k řešení těchto úloh.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Vybrané typy rovnic s jednou neznámou

Kvadratické rovnice

Definice. Kvadratickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad \text{kde } a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Čísla a, b , c nazýváme koeficienty kvadratické rovnice, výrazy ax^2, bx a c nazýváme členy této rovnice, a to po řadě kvadratický, lineární a absolutní.

Odvození vzorce pro řešení kvadratické rovnice. Po vydělení rovnice nenulovým číslem a dostaneme

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Její levou stranu upravíme pomocí doplnění na čtverec

$$\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Označíme-li $D = b^2 - 4ac$, můžeme psát

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{(2a)^2}\,.$$

Vzhledem k tomu, že levá strana této rovnice je nezáporná a jmenovatel pravé strany kladný, bude mít řešená kvadratická rovnice v $\mathbb{R}$ řešení právě tehdy, když $D \geq 0$. Dostáváme tedy tři případy:

1. Jestliže $D < 0$, rovnice v $\mathbb{R}$ nemá žádné řešení.
2. Pokud $D = 0$, platí
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}\,, \tag{1}$$
rovnice tedy má 1 (tzv. dvojnásobný) kořen.
3. Pro $D > 0$ po odmocnění, které je v této situaci ekvivalentní úpravou, obdržíme
$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{D}}{2a}\right| \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,, \tag{2}$$
což znamená, že řešením rovnice jsou dva různé kořeny.

Všimněte si, že odvozený vzorec (2) lze použít i v situaci, kdy $D = 0$, neboť vyjádření (1) je vlastně jeho speciálním případem.

Výraz $D = b^2 - 4ac$ nazýváme *diskriminant* kvadratické rovnice.

Pomocí odvozených vzorců lze vyřešit jakoukoliv kvadratickou rovnici. Má-li však řešená rovnice nějaký speciální tvar (např. $b = 0$ nebo $c = 0$) bývá rychlejší se užití těchto vzorců vyhnout a použít přímý výpočet. Ilustrujeme to na následujících příkladech.

Řešené příklady. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

1.
$$\sqrt{3}x^2 - 5x - 2\sqrt{3} = 0\,,$$

2.
$$4x^4 - x^2 - 18 = 0\,,$$

3.
$$25x^2 - 30x + 9 = 0\,,$$

4.
$$9x^2 + 42x + 50 = 0\,,$$

5.
$$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x = 0\,.$$

Řešení.

1. Dle námi používaného značení je $a = \sqrt{3}$, $b = -5$ a $c = -2\sqrt{3}$. Výpočtem diskriminantu zjistíme, že $D = b^2 - 4ac = 25 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-2\sqrt{3}\right) = 49 > 0$, takže řešená rovnice má dva reálné různé kořeny. Ty najdeme užitím vztahu (2). Platí
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+7}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-7}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$
Veškeré úpravy byly ekvivalentní, žádné podmínky stanovovat není třeba, zkoušku provádět nemusíme. Dostáváme tak závěr, že $K = \left\{2\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

2. Všimneme-li si, že všechny mocniny neznámé x jsou sudé, nabízí se provést substituci $y = x^2$. Po jejím zavedení je naším úkolem řešit rovnici $4y^2 - y - 18 = 0$. Její diskriminant je $D = (-1)^2 - 4\cdot 4\cdot(-18) = 289 = 17^2 > 0$. Proto má pomocná rovnice s neznámou y dva reálné různé kořeny, a to
$$y_1 = \frac{1+17}{2\cdot 4} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \qquad \text{a} \qquad y_2 = \frac{1-17}{2\cdot 4} = -\frac{16}{8} = -2\,.$$
Zbývá se vrátit k původní neznámé. Platí
$$x_1^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1a,1b} = \pm\frac{3}{2} \qquad \text{a} \qquad x_2^2 = -2\,, \text{ což v } \mathbb{R} \text{ nelze.}$$
Dostáváme tak závěr $K = \left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$.

3. Když si uvědomíme, že $25x^2 - 30x + 9 = (5x-3)^2$, ihned uvidíme, že jediným kořenem řešené rovnice je $x = \frac{3}{5}$. Samozřejmě lze tuto rovnici řešit „otrocky“ užitím vzorce podobně jako v předchozích úlohách. Není to však výhodné. Při tomto postupu vychází $D = (-30)^2 - 4\cdot 25\cdot 9 = 0$, takže podle (1) obdržíme $x = \frac{30}{2\cdot 25} = \frac{3}{5}$, takže $K = \left\{\frac{3}{5}\right\}$.

4. Tentokrát není levá strana uvažované rovnice přímo čtvercem, přesto lze postupovat podobně jako v předchozí úloze. Platí $9x^2 + 42x + 50 = (9x^2 + 42x + 49) + 1 = (3x+7)^2 + 1 > 0$, proto rovnice $9x^2 + 42x + 50 = 0$ v $\mathbb{R}$ nemá žádné řešení, $K = \emptyset$. Samozřejmě bychom toto zjistili i pomocí výpočtu diskriminantu, který vychází záporný: $D = 42^2 - 4\cdot 9\cdot 50 = -36$.

5. Uvedenou rovnici je výhodné řešit rozkladem na součin. Platí
$$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}x\left(x + \sqrt{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \{0; -2\}\,.$$

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice (tzv. (Newton)-Viètovy vztahy).

Označme x_1 a x_2 kořeny uvažované kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Tu můžeme vyřešit rovněž tak, že její levou stranu rozložíme na součin, tj.

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Po roznásobení tedy máme

$$ax^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c\,.$$

Porovnáním koeficientů u lineárního a absolutního členu dostaneme

$$-a\,(x_1 + x_2) = b \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

a

$$ax_1x_2 = c \quad \Leftrightarrow \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

Uvedené vzorce sice nenahrazují vzorec (2), ale zato platí i v situaci, kdy $D < 0$. Můžeme s nimi tedy počítat i v případě, že kořeny kvadratické rovnice nechceme či neumíme najít.

Řešené příklady.

1. Výraz $V = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ vyjádřete ve tvaru, který obsahuje jen součty či součiny hodnot x_1 a x_2.
2. Aniž řešíte rovnici $x^2 - x + 16 = 0$, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou (druhými) odmocninami kořenů zadané rovnice.

Řešení.

1. Platí
$$V = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}\,.$$
2. Označme x_1 a x_2 kořeny rovnice $x^2 - x + 16 = 0$. Platí tedy pro ně $x_1 + x_2 = 1$ a $x_1x_2 = 16$. Hledejme vyhovující rovnici ve tvaru $ay^2 + by + c = 0$. Pro její kořeny y_1a y_2 má podle zadání platit $y_1 = \sqrt{x_1}$ a $y_2 = \sqrt{x_2}$, podle Viètových vztahů pak $y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}$ a $y_1y_2 = \frac{c}{a}$. Počítejme
$$y_1 + y_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2} = \sqrt{x_1 + 2\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} + x_2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}} =$$
$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{16}} = \sqrt{9} = 3 = -\frac{b}{a}\,,$$
$$y_1y_2 = \sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1x_2} = \sqrt{16} = 4 = \frac{c}{a}\,.$$
Protože chceme najít jednu z vyhovujících rovnic, můžeme si například zvolit $a = 1$. Potom z právě provedených výpočtů dostaneme $b = -3$ a $c = 4$, takže hledaná rovnice je tvaru $y^2 - 3y + 4 = 0$. Poznamenejme, že vyhovujících rovnic je nekonečně mnoho, vzájemně se liší nenulovým násobkem, neboť jde o ekvivalentní úpravy nalezené rovnice.

Rovnice - zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

1. $$\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{8} = 0\,,$$

2. $$\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}x - \sqrt{12} = 0\,,$$

3. $$\sqrt{2}x^4 - 2x^2 - \sqrt{32} = 0\,,$$

4. $$\sqrt{3}x^6 + \sqrt{32}x^3 - \sqrt{192} = 0\,,$$

5. $$6x^2 + 7x - 3 = 0\,,$$

6. $$4x^2 + 11x + 6 = 0\,,$$

7. $$6x^2 - 19x + 10 = 0\,,$$

8. $$8x^6 - 215x^3 - 27 = 0\,,$$

9. $$9x^2 + 42x + 49 = 0\,,$$

10. $$25x^2 - 9 = 0\,,$$

11. $$-16x^2 + 81 = 0\,,$$

12. $$2x^2 - 3x = 0\,.$$

Rovnice - návody k řešení a výsledky úloh.

V úlohách 9. - 12. je výhodnější počítat bez užití vzorce (2).

1. $K = \left\{ 2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$,
2. $K = \left\{ \sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$,
3. užijte substituci $x^2 = y$, $K = \left\{ \pm\sqrt[4]{8} \right\}$,
4. užijte substituci $x^3 = y$, $K = \left\{ \sqrt[6]{\frac{8}{3}}; -\sqrt[6]{24} \right\}$,
5. $K = \left\{ \frac{1}{3}; -\frac{3}{2} \right\}$,
6. $K = \left\{ -2; -\frac{3}{4} \right\}$,
7. $K = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{5}{2} \right\}$,
8. užijte substituci $x^3 = y$, $K = \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$,
9. $K = \left\{ -\frac{7}{3} \right\}$,
10. $K = \left\{ \pm\frac{3}{5} \right\}$,
11. $K = \left\{ \pm\frac{9}{4} \right\}$,
12. $K = \left\{ 0; \frac{3}{2} \right\}$.

Užití Viètových vztahů - zadání úloh.

1. Následující výrazy vyjádřete ve tvaru, který obsahuje jen součty či součiny hodnot x_1 a x_2.
   a)
   $$V_1 = \left(x_1^{-1} + x_2^{-1} \right)^{-2} ,$$
   b)
   $$V_2 = x_1^3 + x_2^3 ,$$
   c)
   $$V_3 = \sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_2} .$$
2. Uvažujme rovnici $4x^2 - 11x + 5 = 0$. Aniž tuto rovnici řešíte, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejíž kořeny jsou
   a) opačná čísla než kořeny uvažované rovnice,
   b) druhými mocninami kořenů uvažované rovnice,
   c) převrácenými hodnotami kořenů uvažované rovnice,
   d) čísla o 2 větší než kořeny uvažované rovnice,
   e) čísla 4 krát větší než kořeny uvažované rovnice.

3. Označme x_1 a x_2 kořeny rovnice $x^2 + x + 2 = 0$. Aniž tuto rovnici řešíte, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou čísla

$$\frac{1}{x_1^3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x_2^3}\,.$$

Užití Viètových vztahů - návody k řešení a výsledky úloh.

1. Počítejme

   a)

$$V_1 = \left(x_1^{-1} + x_2^{-1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^{-2} = \left(\frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2}\right)^{-2} = \frac{(x_1 x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2}\,,$$

   b)

$$V_2 = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3\right) - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)\,,$$

   c)

$$V_3 = \sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_2} = \sqrt{\left(\sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + x_1 + 2\sqrt{1 + x_1}\sqrt{1 + x_2} + 1 + x_2} = \sqrt{2 + (x_1 + x_2) + 2\sqrt{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2}}\,.$$

2. Pro kořeny x_1 a x_2 rovnice $4x^2 - 11x + 5 = 0$ platí $x_1 + x_2 = \frac{11}{4}$ a $x_1 x_2 = \frac{5}{4}$. Aby nedošlo k duplicitnímu značení hledejme rovnici ve tvaru $ay^2 + by + c = 0$.

   a) Má platit $y_1 = -x_1$ a $y_2 = -x_2$,

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -\frac{11}{4}$$

   a

$$y_1 y_2 = \frac{c}{a} = -x_1 \cdot (-x_2) = x_1 x_2 = \frac{5}{4}\,.$$

   Zvolíme-li $a = 4$, dopočteme $b = 11$ a $c = 5$. Jedna z vyhovujících rovnic je tedy tvaru $4y^2 + 11y + 5 = 0$.

   b) Např. $16y^2 - 81y + 25 = 0$,

   c) např. $5y^2 - 11y + 4 = 0$,

   d) např. $4y^2 - 27y + 43 = 0$,

   e) např. $y^2 - 11y + 20 = 0$,

3. Např. $8y^2 - 5y + 1 = 0$.

Rovnice s neznámou pod odmocninou

Důležitá upozornění.

- Umocnění rovnice (na druhou) je obecně důsledkovou úpravou.
- Při použití důsledkové úpravy je zkouška nutnou součástí řešení rovnice. Není „jen“ numerickou kontrolou, může při ní dojít k vyloučení těch „kandidátů na kořeny“, které kořeny nejsou.
- V případě, že umocňujeme rovnici, jejíž obě strany jsou nezáporné, je tato úprava dokonce ekvivalentní.
- Lze tedy postupovat cestou stanovení podmínek, za nichž jsou všechny výrazy vystupující v rovnici definované a ve všech místech umocnění rovnice nezáporné. Při tomto postupu pak již není nutné provádět zkoušku.
- Dle konkrétní úlohy doporučuji řešiteli volit cestu určení všech potřebných podmínek, nebo variantu provedení zkoušky podle toho, co je v daném případě jednodušší.

Řešené příklady. V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:

1. Kdybychom řešení rovnice
$$\sqrt{x-4}=\sqrt{3-x}$$
začali stanovením podmínek, viděli bychom, že má současně platit $x \geq 4$ a $x \leq 3$, což není možné splnit. Proto tato rovnice nemá řešení.
Umocníme-li (jako důsledkovou úpravu) zadanou rovnici, dostaneme
$$x-4=3-x \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{7}{2}\,.$$
Při provádění zkoušky, která je při tomto postupu nezbytnou součástí řešení, vidíme, že levá strana rovnice pro hodnotu $\frac{7}{2}$ není definována, takže $K=\emptyset$.

2. Při řešení některých rovnic je potřeba je umocňovat opakovaně. Rovnici
$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=1$$
je výhodné před umocněním přepsat do tvaru
$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2-x}+1\,.$$
Pak platí (užitím důsledkových úprav)
$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2-x}+1 \quad \Rightarrow \quad 3x+1=\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1=2-x+2\sqrt{2-x}+1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x-1=\sqrt{2-x} \quad \Rightarrow \quad 4x^2-4x+1=2-x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-3x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (4x+1)\,(x-1)=0\,,$$
takže $x_1=-\frac{1}{4}$ a $x_2=1$. Všimněte si, že při umocňování rovnice je vždy třeba umocnit celou její levou i celou její pravou stranu! Dále pokračujeme zkouškou:
$$L\left(-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}-\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1\neq 1=P\left(-\frac{1}{4}\right)\,,$$
$$L\,(1)=\sqrt{3+1}-\sqrt{2-1}=\sqrt{4}-\sqrt{1}=2-1=1=P\,(1)\,,$$
tudíž $K=\{1\}$. Pokud bychom se chtěli povinnosti dělat zkoušku vyhnout, museli bychom stanovit podmínky, a to

a) k tomu, aby byly výrazy s odmocninami definovány: $3x+1 \geq 0$ a $2-x \geq 0$ (odmocňované výrazy musí být nezáporné),

b) k tomu, aby první umocnění bylo ekvivalentní úpravou: $\sqrt{3x+1} \geq 0$ a $\sqrt{2-x}+1 \geq 0$ (tyto požadavky jsou již zřejmě splněny podmínkami v části a)),

c) k tomu, aby druhé umocnění bylo ekvivalentní úpravou: $2x-1 \geq 0$ a $\sqrt{2-x} \geq 0$ (nová je pouze podmínka první).

Rozřešením uvedených podmínek dostaneme souhrnnou podmínku $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right\rangle$, kterou x_1 nesplňuje, zatímco x_2 jí vyhovuje.

3. Také rovnici

$$\sqrt{x+25}-4 = \frac{\sqrt{x^2+25x+4}}{\sqrt{x+25}+4}$$

je před umocněním upravit do - pro tento účel - vhodnějšího tvaru vynásobením rovnice jmenovatelem její pravé strany. Potom

$$\left(\sqrt{x+25}-4\right)\left(\sqrt{x+25}+4\right) = \sqrt{x^2+25x+4} \quad \Rightarrow \quad (x+25-16)^2 = x^2+25x+4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+18x+81 = x^2+25x+4 \quad \Leftrightarrow \quad 77 = 7x \quad \Leftrightarrow \quad x = 11\,.$$

Například provedením zkoušky zjišťujeme, že

$$L\,(11) = \sqrt{11+25}-4 = \sqrt{36}-4 = 2 \quad \text{a} \quad P\,(11) = \frac{\sqrt{11^2+25\cdot 11+4}}{\sqrt{11+25}+4} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{36}+4} = \frac{20}{10} = 2\,,$$

takže $K = \{11\}$.

4. Rovnici

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

je výhodné formálně zjednodušit zavedením substituce $y = \sqrt{x-1}$. Odtud máme

$$y^2 = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2+1\,,$$

takže pro řešenou rovnici v nové proměnné y platí

$$\sqrt{y^2+1+3-4y} + \sqrt{y^2+1+8-6y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y^2-4y+4} + \sqrt{y^2-6y+9} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |y-2| + |y-3| = 1\,.$$

Vyřešením této rovnice získáme, že

$$y \in \langle 2; 3 \rangle \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 5; 10 \rangle\ ,$$

přičemž za podmínky $x \geq 1$ je tato úprava (a všechny předchozí také) dokonce ekvivalentní. Proto $K = \langle 5; 10 \rangle$. Povšimněte si, že u této rovnice, která má nekonečně mnoho řešení, není provedení zkoušky formálně možné a je tedy třeba stanovit podmínky.

5. Rovnici

$$\sqrt[3]{3x+28} - \sqrt[3]{3x-28} = 2$$

bude třeba umocnit na třetí. Vzhledem k tomu, že se jedná o lichou odmocninu, lze zdůvodnit, že je tato úprava dokonce ekvivalentní. Pokud si tím však řešitel není jistý, není problém provést zkoušku. Před umocněním ale bude výhodné ji upravit do tvaru, ve kterém bude na každé straně rovnice jediná odmocnina. Počítejme

$$\left(\sqrt[3]{3x+28}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{3x-28}+2\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+28 = 3x-28+6\cdot\left(\sqrt[3]{3x-28}\right)^2 + 12\cdot\sqrt[3]{3x-28}+8\,.$$

Nepřehlédněme možnost výhodné substituce $z = \sqrt[3]{3x-28}$. Pak dostáváme

$$56 = 6z^2+12z+8 \quad \Leftrightarrow \quad z^2+2z-8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+4)\,(z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{-4; 2\}\ .$$

Dosazením do substituční rovnice pak dopočteme hodnoty hledané neznámé x. Vychází $K = \{\pm 12\}$.

Zadání úloh.

1. Zpaměti v $\mathbb{R}$ vyřešte následující rovnice a svá tvrzení zdůvodněte

   a)
$$\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x+3}=-1\,,$$

   b)
$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}=1\,,$$

   c)
$$\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+3}=0\,,$$

   d)
$$\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x+5}=2\,.$$

2. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

   a)
$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5\,,$$

   b)
$$\sqrt{3x+6}+\sqrt{2-x}=2\,,$$

   c)
$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3-x}=3\,,$$

   d)
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5}\,,$$

   e)
$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2+4}}=1-x\,,$$

   f)
$$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2\,,$$

   g)
$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x-2}}=2\,,$$

   h)
$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12\,,$$

   i)
$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}\,,$$

   j)
$$\sqrt{x+1}+x^2-2x-1=0\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) Součet druhých odmocnin je číslo nezáporné, proto se nemůže rovnat -1, $K = \emptyset$.

   b) Na levé straně odečítáme od menšího čísla větší, proto je záporná, $K = \emptyset$.

   c) Součet dvou nezáporných čísel je nulový právě tehdy, když jsou obě nulová. Druhý sčítanec může být nulový jedině, když $x = -3$. Pro tuto hodnotu je však nulový i sčítanec první, $K = \{-3\}$.

   d) Snadno nahlédneme, že k tomu, aby byla rovnice definovaná, je nutné a stačí, aby $x \geq \frac{1}{4}$. Nejmenší možná hodnota prvního sčítance je 0 (pro $x = \frac{1}{4}$). Druhý sčítanec je větší. S ohledem na podmínky pak jeho nejmenší možná hodnota bude $\sqrt{6}$ (pro $x = \frac{1}{4}$). Levá strana rovnice je tedy vždy větší než 2, $K = \emptyset$.

2. a) $K = \{4\}$, (číslo 144 kořenem není),

   b) $K = \{-2\}$, (číslo 1 kořenem není),

   c) $K = \{-1; 3\}$,

   d) $K = \{5\}$,

   e) $K = \{0\}$,

   f) pomocí substituce $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ lze zadanou rovnici přepsat do tvaru $3y^2 + 2y - 5 = 0$, $K = \{-5; 0\}$,

   g) $K = \{10\}$,

   h) pomocí substituce $y = \sqrt[3]{x}$ lze zadanou rovnici postupně upravit do tvaru $y^2 - y - 12 = 0$, $K = \{-27; 64\}$,

   i) pomocí substituce $y = x^2 + x$ lze zadanou rovnici postupně upravit do tvaru $y^2 + 5y = 0$, $K = \{-1; 0\}$,

   j) standardním postupem při umocnění rovnice ve tvaru $\sqrt{x+1} = 1 + 2x - x^2$ dostaneme rovnici čtvrtého stupně, kterou se ale podaří upravit do součinového tvaru:

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left[x^3 - 3x^2 - \left(x^2 - 2x - 3\right)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left[x^2(x-3) - (x-3)(x+1)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3)\left(x^2 - x - 1\right) = 0\,,$$

   po dořešení a zohlednění podmínek či provedení zkoušky získáme závěr $K = \left\{0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.