Užití výrokové logiky při sestavování elektrických obvodů

Naďa Horáková

Klíčová aktivita „Podpora gramotností“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Anotace

Tento materiál se zabývá výrokovou logikou a jejím užitím při sestavování elektrických obvodů. Jedná se tak o téma, které je vhodné pro procvičování výrokové logiky, přičemž je samozřejmě možné materiál využít i v hodinách fyziky při zapojování elektrických obvodů. Materiál je vhodný pro střední školy.

V rámci textu je několik řešených příkladů, materiál také obsahuje dva pracovní listy (i se vzorovými řešeními).

Obsah

1 Výroková logika

V této kapitole jen krátce zopakujeme základní pojmy výrokové logiky. Pokud byste si chtěli výrokovou logiku zopakovat důkladněji, tak je možné přečíst si například články na `https://matematika.cz/vyroky`, případně využijte libovolnou středoškolskou učebnici zabývající se tímto tématem.

1.1 Výrok a jeho pravdivostní hodnota

Výrokem nazýváme jazykový výraz (sdělení), u něhož má smysl otázka, zda je buď **pravdivý**, nebo **nepravdivý**. Příkladem výroku může být „Božena Němcová byla českou spisovatelkou.“, „Venku prší.“, „Brno je hlavním městem České republiky.“

Výrokům se přiřazují **pravdivostní hodnoty výroků**: Je-li výrok pravdivý, je jeho pravdivostní hodnota **pravda**, označuje se číslicí **1**. Je-li výrok nepravdivý, je jeho pravdivostní hodnota **nepravda** a označuje se číslicí **0**. Například výrok „Brno je hlavním městem České republiky“ není pravdivý, proto je jeho pravdivostní hodnota nepravda.

1.2 Logické spojky a složené výroky

Jednoduché výroky můžeme pomocí **logických spojek** spojovat do **složených výroků**. Vezměme si například výroky „Božena Němcová byla česká spisovatelka“ a „Brno je hlavním městem České republiky“. Z těchto dvou výroků můžeme vytvořit složený výrok „Božena Němcová byla česká spisovatelka **a** Brno je hlavním městem České republiky“.

Mezi základní logické spojky, které spojují dva výroky, patří: **konjunkce** ($\wedge$), **disjunkce** ($\vee$), **implikace** ($\Rightarrow$), **ekvivalence** ($\Leftrightarrow$).

Negací ($\neg$) výroku rozumíme výrok, který tvrdí přesný opak, a má tedy opačnou pravdivostní hodnotu. Významy těchto spojek najdete v tabulce 1. Tabulka 2 uvádí pravdivostní hodnoty složených výroků.

1.3 Výrokové formule

Symboly p, q nemusí představovat jen konkrétní výroky, ale obecně **výrokové proměnné** zastupující výroky. Výrazy vytvořené z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek a popř. závorek se nazývají **výrokové formule**.

Příklady výrokových formulí s výrokovými proměnnými p, q, r mohou být p, q, $\neg p$, $p \wedge q$, $\neg(p \wedge q)$, $(p \vee q) \wedge r$, $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$, ...

Pravdivostní ohodnocení výrokové formule (přiřazení pravdivostních hodnot v závislosti na zvolených pravdivostních hodnotách výrokových proměnných) se obvykle provádí užitím **tabulky pravdivostních hodnot** dané výrokové formule.

Logická spojka	**Čtení**	**Definiční podmínky pravdivosti**
$\neg p$ negace	není pravda, že ...	je pravdivý výrok, právě když výrok p je nepravdivý
$p \wedge q$ konjunkce	a, a zároveň	je pravdivý výrok, právě když oba výroky p, q jsou pravdivé
$p \vee q$ disjunkce	nebo	je pravdivý výrok, právě když alespoň jeden z výroků p, q je pravdivý
$p \Rightarrow q$ implikace	jestliže ..., pak ...	je pravdivý výrok, právě když buď oba výroky p, q jsou pravdivé, anebo výrok p je nepravdivý a výrok q je jakýkoliv
$p \Leftrightarrow q$ ekvivalence	právě když ...	je pravdivý výrok, právě když výroky p, q jsou buď oba pravdivé, nebo oba nepravdivé

Tabulka 1: Tabulka logických spojek

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 2: Tabulka pravdivostních hodnot složených výroků

Tautologie jsou takové výrokové formule, které pro libovolné pravdivostní hodnoty výrokových proměnných nabývají pravdivostní hodnoty 1.

Úplný systém logických spojek je množina logických spojek, pomocí které můžeme zapsat všechny logické formule. Příkladem takového systému je například množina $\{\neg, \wedge, \vee\}$ nebo $\{\neg, \wedge\}$, případně $\{\neg, \vee\}$. V tabulce 3 můžete vidět, jakým způsobem můžeme implikaci vyjádřit pouze pomocí negace a disjunkce.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Tabulka 3: Implikace vyjádřená pomocí negace a disjunkce

Příklad 1: Jak můžeme vyjádřit ekvivalenci $p \Leftrightarrow q$ pouze pomocí negace, konjunkce a disjunkce?

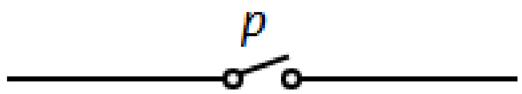
Odpověď: V tabulce 2 vidíme pravdivostní hodnoty složených výroků. Všimněme si, že $p \Leftrightarrow q$ je pravdivé tehdy, když jsou zároveň pravdivé výroky p a q nebo když jsou zároveň pravdivé výroky $\neg p$ a $\neg q$. To tedy znamená, že $p \Leftrightarrow q$ můžeme zapsat jako $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Ověřme si pomocí tabulky pravdivostních hodnot (viz tabulka 4), zda je tomu opravdu tak.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1

Tabulka 4: Ekvivalence vyjádřená pomocí negace, konjunkce a disjunkce

2 Elektrické obvody

Představme si elektrický obvod, v němž je zapojeno několik spínačů (kontaktů). Spínač je nejjednodušší zařízení, které se může nacházet ve dvou stavech: buď jím proud prochází – tento stav označíme číslicí 1, nebo neprochází – tento stav označíme číslicí 0. Stav obvodu tedy bude záviset na stavech spínačů, které v něm jsou zařazeny, a také na jejich kombinacích.



Obr. 1: Kontakt o stavu p

Obr. 2: Kontakt o stavu $\neg p$

Uvažujme tedy obvod, ve kterém je pouze jeden spínač. Stav spínače označíme výrokovou proměnnou p (obrázek 1). K takovému obvodu můžeme přiřadit obvod s jedním kontaktem o stavu $\neg p$, který bude vždy v opačném stavu než kontakt o stavu p (obrázek 2). Tyto dva obvody realizují výrokové formule p a $\neg p$.

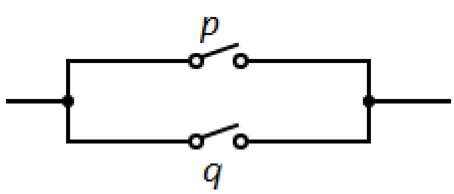
Příklad 2: Jakým způsobem můžeme pomocí dvou kontaktů p a q realizovat výrokovou formuli $p \wedge q$?

Odpověď: Víme, že výroková formule $p \wedge q$ je pravdivá pouze v případě, že pravdivostní hodnoty výroků p a q jsou pravda. V ostatních případech je pravdivostní hodnota $p \wedge q$ nepravda. To znamená, že v obvodu musí být spínače zapojeny sériově – v takovém případě platí, že obvodem prochází proud pouze tehdy, jsou-li oba spínače ve stavu 1 (viz obrázek 3).

Obr. 3: Realizace formule $p \wedge q$

Příklad 3: Jakým způsobem můžeme pomocí dvou kontaktů p a q realizovat výrokovou formuli $p \vee q$?

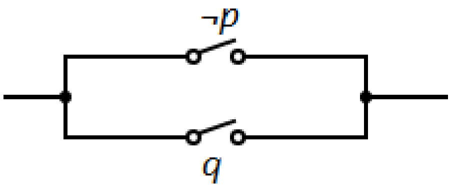
Odpověď: Víme, že výroková formule $p \vee q$ je pravdivá tehdy, když je alespoň jeden z výroků pravdivý. To znamená, že kontakty musí být zapojeny paralelně – v takovém případě totiž platí, že obvodem prochází proud tehdy, je-li alespoň jeden ze spínačů ve stavu 1 (viz obrázek 4).



Obr. 4: Realizace formule $p \vee q$

Příklad 4: Jakým způsobem můžeme pomocí dvou kontaktů p a q realizovat výrokovou formuli $p \Rightarrow q$?

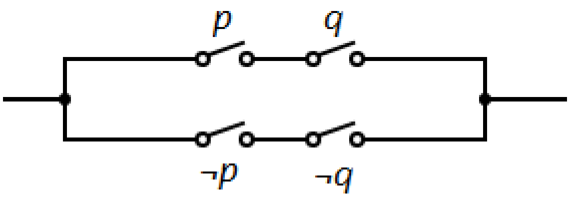
Odpověď: Jelikož už víme, jak realizovat konjunkci, disjunkci a negaci, tak využijeme poznatků z první kapitoly, kde jsme si ukázali, jak vyjádřit implikaci pouze pomocí negace a disjunkce (tabulka 3). Formule $p \Rightarrow q$ se dá tedy zapsat jako $\neg p \vee q$, což už umíme sestavit – spínače $\neg p$ a q zapojíme paralelně (viz obrázek 5).



Obr. 5: Realizace formule $p \Rightarrow q$

Příklad 5: Jakým způsobem můžeme realizovat výrokovou formuli $p \Leftrightarrow q$?

Odpověď: Využijeme poznatků z příkladu 1 a sestavíme obvod (tentokrát už bude složitější) – viz obrázek 6.



Obr. 6: Realizace formule $p \Leftrightarrow q$

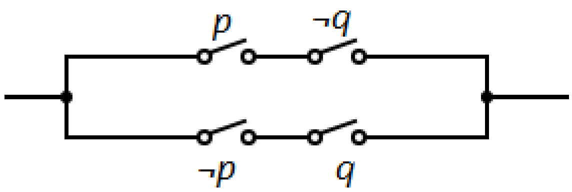
Příklad 6: Výroková formule je dána následující tabulkou. Načrtni schéma obvodu, která danou formuli realizuje.

p	q	výroková formule
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Odpověď: Budeme postupovat stejně jako v Příkladu 1. Formule je pravdivá,

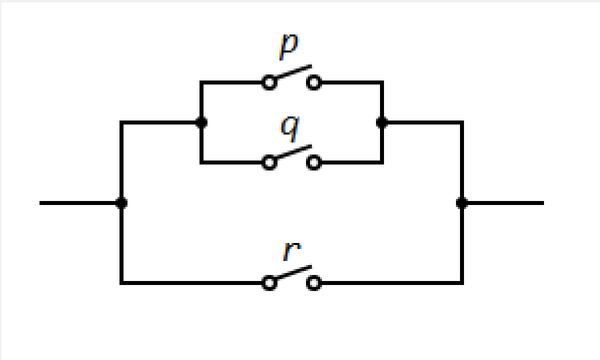
- když je výrok p pravdivý a zároveň výrok q nepravdivý (tj. $\neg q$ je pravdivý výrok)
- nebo když je výrok p nepravdivý (tj. $\neg p$ je pravdivý) a výrok q pravdivý

Výroková formule je tedy tvaru $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Schéma vidíme na obrázku 7.



Obr. 7: Schéma obvodu z příkladu 6.

Příklad 7: Zapiš pomocí výrokové formule schéma obvodu, který je na následujícím obrázku.



Odpověď: V obvodu máme tři spínače zapojené paralelně. K tomu, aby obvodem procházel proud tedy stačí, aby byl sepnut alespoň jeden spínač. Výroková formule bude tedy tvaru $(p \_ q) \_ r$, což ověříme tabulkou pravdivostních hodnot.

p	q	r	$(p \_ q) \_ r$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

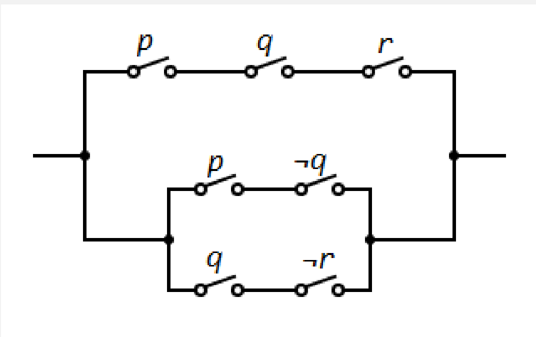
Vidíme, že opravdu platí, že je-li alespoň jeden z výroků p, q, r pravdivý, pak je pravdivý i výrok $(p \_ q) \_ r$. Pouze tehdy, jsou-li všechny spínače otevřené (tedy všechny tři výroky jsou nepravdivé), obvodem proud neprochází (výsledný složený výrok je nepravdivý).

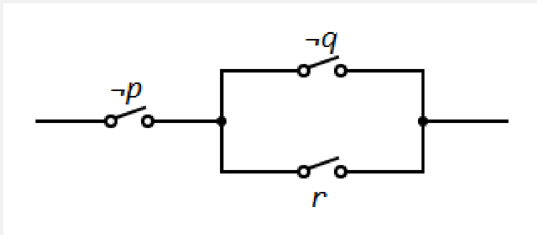
Co kdybychom změnili zadání předchozího příkladu tak, že bychom měli zadánu tabulku pravdivostních hodnot a chtěli určit schéma realizující danou výrokovou formuli? V příkladu 1 a v příkladu 6 jsme postupovali tak, že jsme se podívali, kdy je formule pravdivá a následně jsme se dívali na pravdivostní hodnotu jednotlivých výrokových proměnných. Pokud platilo, že výroková formule byla pravdivá tehdy, byla-li proměnná p pravdivá a proměnná q nepravdivá, tak jsme zapsali $p \wedge \neg q$.

Úplně stejným způsobem bychom mohli postupovat i v modifikovaném zadání příkladu 7, je ale jasné, že takový postup by nás zavedl k hrůzné výrokové formuli (i ta by ale byla správným řešením).

Je očividné, že existuje nekonečně mnoho výrokových formulí, které popisují danou tabulku pravdivostních hodnot; některé tyto výrokové formule jsou však zbytečně složité. Naštěstí je možné složité výrokové formule zjednodušovat pomocí de Morganových zákonů (`https://cs.wikipedia.org/wiki/De_Morganovy_z%C3%A1kony`).

Příklad 8: Na obrázcích níže jsou dána schémata dvou obvodů. Rozhodni, zda výrokové formule realizované příslušnými obvody, jsou si rovny.





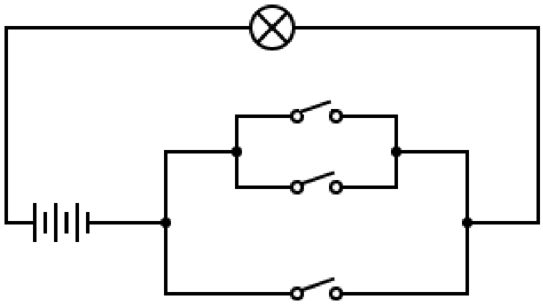
Odpověď: Nejdříve popíšeme každý obvod výrokovou formulí. První obvod realizuje výrokovou formuli $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)$ (označme ji v); druhý obvod pak formuli $\neg p \wedge (\neg q \vee r)$ (označme ji w). Obě formule pak určíme tabulkami pravdivostních hodnot a výsledky porovnáme (viz tabulka 5).
Vidíme, že hodnoty v posledních dvou sloupcích nejsou stejné. Výrokové formule realizované danými obvody si tedy rovny nejsou.

Všechny obvody, které zde byly uvedeny, lze samozřejmě i fyzicky sestavit – stačí, aby obvod obsahoval zdroj napětí a například odpovídající žárovku, kterou využijeme pro zkoumání toho, zda obvodem prochází proud. Jeden z takových obvodů můžeme vidět na obrázku 8.

Pro zakreslování schémat elektrických obvodů lze použít `https://www.circuit-diagram.org/editor/`. Pro simulaci průchodu proudu daným obvodem můžete vyzkoušet `https://phet.colorado.edu/en/simulation/circuit-construction-kit-dc`.

p	q	r	p ^ q ^ r	p ^ :q	q ^ :r	:q _ r	v	w
1	1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1

Tabulka 5: Tabulka pravdivostních hodnot z příkladu 8



Obr. 8: Elektrický obvod

3 Pracovní listy

Na dalších stranách jsou vytvořeny dvě verze pracovního listu, který může sloužit k procvičení znalostí. Ke každému pracovnímu listu je vytvořeno i vzorové řešení.

Jméno:

Užití výrokové logiky při sestavování elektrických obvodů

Příklad 1

Jsou dány dvě výrokové proměnné p a q a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	výroková formule
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Sestav schéma obvodu obsahujícího alespoň jeden spínač, který realizuje tuto výrokovou formuli.

Příklad 2

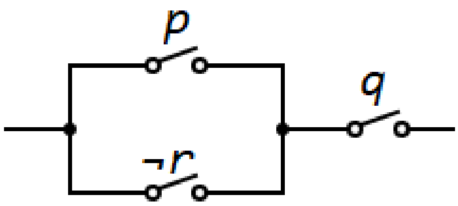
Sestav schéma obvodu, který realizuje výrokovou formuli $(p \square q) \square (r \square p)$.

Příklad 3

Vysvětli pomocí obvodu realizujícího výrokovou formuli $p \square q$, proč nezáleží na pořadí výrokových proměnných p a q.

Příklad 4

Zapiš pomocí výrokové formule schéma obvodu, které je na obrázku:



Příklad 5

Jsou dány výrokové proměnné p, q a r a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	r	výroková formule
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Sestav schéma obvodu realizující tuto výrokovou formuli.

Jméno:

Užití výrokové logiky v elektrických obvodech

Příklad 1

Jsou dány dvě výrokové proměnné p a q a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	výroková formule
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Sestav schéma obvodu obsahujícího alespoň jeden spínač, který realizuje tuto výrokovou formuli.

Příklad 2

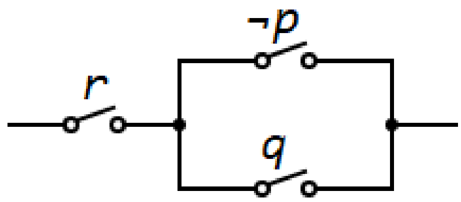
Sestav schéma obvodu, který realizuje výrokovou formuli $(p \square q) \square (r \square q)$.

Příklad 3

Vysvětli pomocí obvodu realizujícího výrokovou formuli $p \square q$, proč nezáleží na pořadí výrokových proměnných p a q.

Příklad 4

Zapiš pomocí výrokové formule schéma obvodu, které je na obrázku:



Příklad 5

Jsou dány výrokové proměnné p, q a r a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	r	výroková formule
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Sestav schéma obvodu realizující tuto výrokovou formuli.

Jméno:

Užití výrokové logiky při sestavování elektrických obvodů

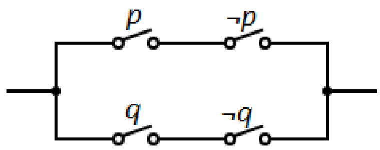
Příklad 1

Jsou dány dvě výrokové proměnné p a q a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	výroková formule
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

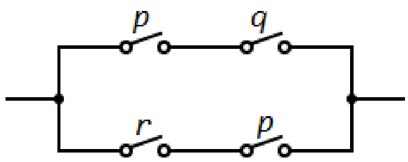
Sestav schéma obvodu obsahujícího alespoň jeden spínač, který realizuje tuto výrokovou formuli.

Výrokovou formulí může být například formule $p \quad \neg p$ nebo $q \quad \neg q$ nebo klidně i složitější formule $(p \quad \neg p) \quad (q \quad \neg q)$.
Obvody tedy mohou vypadat takto:



Příklad 2

Sestav schéma obvodu, který realizuje výrokovou formuli $(p \quad q) \quad (r \quad p)$.



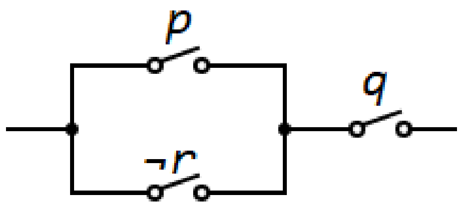
Příklad 3

Vysvětli pomocí obvodu realizujícího výrokovou formuli $p \quad q$, proč nezáleží na pořadí výrokových proměnných p a q.

Protože nezáleží na pořadí spínačů – proud bude obvodem procházet pouze tehdy, budou-li oba spínače sepnuté.

Příklad 4

Zapiš pomocí výrokové formule schéma obvodu, které je na obrázku:



$(p \quad \neg r) \quad q$

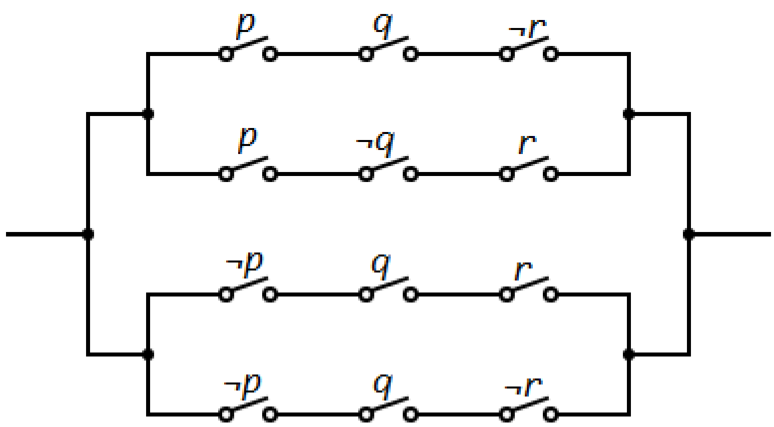
Příklad 5

Jsou dány výrokové proměnné p, q a r a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	r	výroková formule
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Sestav schéma obvodu realizující tuto výrokovou formuli.

Výroková formule je tvaru $(p \quad q \quad \neg r) \quad (p \quad \neg q \quad r) \quad (\neg p \quad q \quad r) \quad (\neg p \quad q \quad \neg r)$.



Jméno:

Užití výrokové logiky v elektrických obvodech

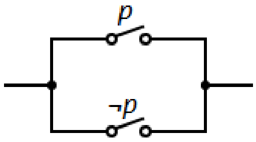
Příklad 1

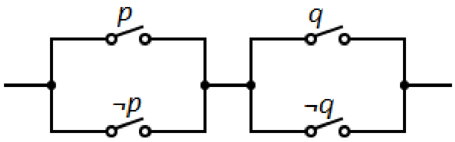
Jsou dány dvě výrokové proměnné p a q a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	výroková formule
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Sestav schéma obvodu obsahujícího alespoň jeden spínač, který realizuje tuto výrokovou formuli.

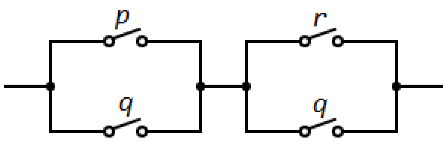
Výrokovou formulí může být například formule $p \quad \neg p$ nebo $q \quad \neg q$ nebo klidně i složitější formule $(p \quad \neg p) \quad (q \quad \neg q)$.
Obvody tedy mohou vypadat takto:





Příklad 2

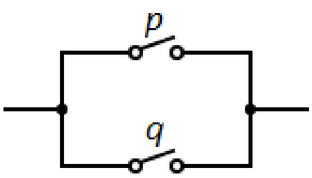
Sestav schéma obvodu, který realizuje výrokovou formuli $(p \quad q) \quad (r \quad q)$.

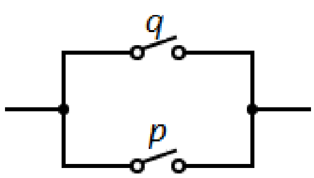


Příklad 3

Vysvětli pomocí obvodu realizujícího výrokovou formuli $p \quad q$, proč nezáleží na pořadí výrokových proměnných p a q.

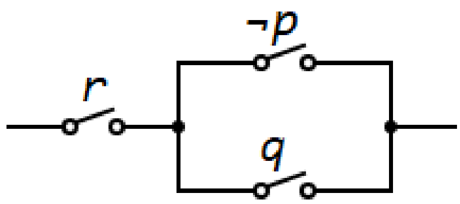
Protože nezáleží na pořadí spínačů – proud bude obvodem procházet tehdy, bude-li sepnut aspoň jeden ze spínačů.





Příklad 4

Zapiš pomocí výrokové formule schéma obvodu, které je na obrázku:



$r \quad (\neg p \quad q)$

Příklad 5

Jsou dány výrokové proměnné p, q a r a výroková formule definovaná tabulkou

p	q	r	výroková formule
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Sestav schéma obvodu realizující tuto výrokovou formuli.

Výroková formule je tvaru $(p \quad \neg q \quad r) \quad (p \quad \neg q \quad \neg r) \quad (\neg p \quad q \quad \neg r) \quad (\neg p \quad \neg q \quad r)$.