Soustavy lineárních rovnic

Materiál obsahuje sadu pracovních listů na řešení soustav lineárních rovnic o více neznámých. Tento materiál může být používán pro žáky 1. ročníku středních odborných škol. Primárně je ale určen pro žáky 4. ročníku středních odborných škol, pro opakování látky k maturitě, příp. rozšíření znalostí pro studium na vysoké škole.

Příklady vytvořila pro potřeby M-kroužku: Mgr. Kateřina Kouřilová

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost" je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Pracovní list – Soustavy lineárních rovnic (1)

S řešením soustav lineárních rovnic jsme se setkali již na základní škole. V hodinách matematiky jsme procvičovali hlavně řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých. U tohoto typu příkladů zatím zůstaneme.

Soustavy lineárních rovnic můžeme řešit různými metodami, např.:

- dosazovací;
- sčítací;
- grafickou.

Tyto metody můžeme vzájemně kombinovat.

V tomto pracovním listu se zaměříme na první z těchto metod, a to na metodu *dosazovací*. Její princip je, že z jedné z rovnic vyjádříme jednu z neznámých (ideálně tu, co jde nejlépe), a tu poté dosadíme do druhé rovnice. Tím získáme řešení jedné z neznámých a toto řešení poté dosadíme do vyjádření první neznámé, které jsme si určili na počátku.

Řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice čísel (pozor na pořadí!).

Př.: Řešte soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých dosazovací metodou:

$$2x - 4y = -2$$

$$\underline{3x + 2y = -3}$$

Když se podíváme na zadání, tak žádná „ideální“ neznámá pro vyjádření se tam nenachází. Ideální neznámou myslíme takovou, která před sebou má +1 nebo –1.

Na druhý pohled je vidět, že první rovnice se dá vydělit číslem 2 a tím dostaneme naši ideální neznámou:

$$2x - 4y = -2 \ \ /\div 2$$

$$x - 2y = -1$$

Z této upravené rovnice si vyjádříme neznámou x tak, že ji ponecháme na levé straně a vše ostatní převedeme na pravou stranu rovnice:

$$x - 2y = -1 \ \ /+2y$$

$$x = -1 + 2y$$

Nyní máme z první rovnice vyjádřenou neznámou x, kterou již můžeme dosadit do druhé rovnice:

$$3x + 2y = -3$$

$$3 \cdot (-1 + 2y) + 2y = -3$$

Po dosazení provedeme všechny naznačené operace a vypočítáme hodnotu neznáme y:

$$-3 + 6y + 2y = -3 \ \ /+3$$

$$8y = 0$$

$$\underline{y = 0}$$

Tímto výpočtem není však příklad ukončen. Nesmíme se zapomenout vrátit k dosazení a vypočítat tak neznámou x (řešením je totiž uspořádaná dvojice čísel).

$$x = -1 + 2y$$

$$x = -1 + 2 \cdot 0$$

$$\underline{x = -1}$$

Po výpočtu neznámé x už víme řešení. Řešením je uspořádaná dvojice $\underline{\underline{[x; y] = [-1; 0]}}$.

Úlohy na procvičení – vše řešte dosazovací metodou:

---

1)

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 1 \\ 4x + y &= 9 \end{aligned}$$

---

2)

$$\begin{aligned} 0{,}5x - 3y &= -8 \\ 6x + \frac{1}{3}y &= 13 \end{aligned}$$

Řešení: 1) [2; 1] ;2) [2; 3]

PRACOVNÍ LIST – SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC (2)

S řešením soustav lineárních rovnic jsme se setkali již na základní škole. V hodinách matematiky jsme procvičovali hlavně řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých. U tohoto typu příkladů zatím zůstaneme.

Soustavy lineárních rovnic můžeme řešit různými metodami, např.:

- dosazovací;
- sčítací;
- grafickou.

Tyto metody můžeme vzájemně kombinovat.

V tomto pracovním listu se zaměříme na druhou z těchto metod, a to na metodu *sčítací*. Její princip je, že každou z rovnic vynásobíme takovým reálným číslem, aby se mi po součtu těchto rovnic odečetla jedna z neznámých. Po sečtení rovnic tak získáme jednu rovnici o jedné neznámé, kterou již umíme řešit. Po vyřešení této rovnice se musíme vrátit do zadání a provést stejný postup jako u první neznámé. Je také možné použít první z metod, a to metodu dosazovací tak, že do libovolné rovnice ze zadání dosadíme vypočtenou neznámou, a tím získáme i hodnotu druhé neznámé.

Řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice čísel (pozor na pořadí!).

Př.: Řešte soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých sčítací metodou:

$$2x - 4y = -2$$

$$\underline{3x + 2y = -3}$$

Když se podíváme na zadání, tak první rovnici lze nechat tak jak je a druhou rovnici je vhodné vynásobit číslem 2:

$$2x - 4y = -2$$

$$\underline{3x + 2y = -3 \ \ /\cdot 2}$$

$$2x - 4y = -2$$

$$\underline{6x + 4y = -6}$$

Tímto vynásobením jsme získali opačné koeficienty před neznámou y, která se nám po součtu obou rovnic odečte a zůstane už pouze jedna rovnice s neznámou x:

$$8x = -8 \ \ /\div 8$$

$$\underline{x = -1}$$

V této části příkladu máme dvě možnosti, jak dále pokračovat v řešení soustavy. Buď se vrátíme zpět do zadání a použijeme znovu sčítací metodu i pro druhou neznámou, nebo si použijeme metodu dosazovací.

Dle zadání však musíme použít sčítací metodu. Vrátíme se tedy k původní soustavě a provedeme opět násobení rovnic. Tentokrát však násobíme tak, aby se odečetla neznámá x. To dosáhneme tak, že první rovnici vynásobíme číslem – 3 a druhou číslem 2 (lze i čísly opačnými).

$$2x - 4y = -2 \quad /\cdot(-3)$$
$$\underline{3x + 2y = -3 \quad /\cdot 2}$$
$$-6x + 12y = 6$$
$$\underline{6x + 4y = -6}$$

Tímto vynásobením jsme získali opačné koeficienty před neznámou x, která se nám po součtu obou rovnic odečte a zůstane už pouze jedna rovnice s neznámou y:

$$16y = 0 \quad /\div 16$$
$$\underline{y = 0}$$

Po výpočtu neznámé y už víme řešení. Řešením je uspořádaná dvojice $\underline{\underline{[x; y] = [-1; 0]}}$.

Úlohy na procvičení – vše řešte sčítací metodou:

1)

$$-x + 3y = 1$$
$$\underline{4x + y = 9}$$

2)

$$0{,}5x - 3y = -8$$
$$\underline{6x + \frac{1}{3}y = 13}$$

Řešení: 1) [2; 1] ;2) [2; 3]

Pracovní list – Soustavy lineárních rovnic (3)

S řešením soustav lineárních rovnic jsme se setkali již na základní škole. V hodinách matematiky jsme procvičovali hlavně řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých. U tohoto typu příkladů zatím zůstaneme.

Soustavy lineárních rovnic můžeme řešit různými metodami, např.:

- dosazovací;
- sčítací;
- grafickou.

Tyto metody můžeme vzájemně kombinovat.

V tomto pracovním listu se zaměříme na třetí z těchto metod, a to na metodu *grafickou*. Její princip je, že z každé rovnice si vyjádříme neznámou y. Tím dostaneme předpis lineární funkce. Grafem lineární funkce je přímka a řešením soustavy je pak průsečík těchto dvou přímek.

Řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice čísel (pozor na pořadí!).

Př.: Řešte soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých grafickou metodou:

$$2x - 4y = -2$$

$$\underline{3x + 2y = -3}$$

Z každé rovnice si vyjádříme neznámou y.

$$2x - 4y = -2 \ \ /-2x$$

$$-4y = -2 - 2x \ \ /\div(-4)$$

$$f_1\colon y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$3x + 2y = -3 \ \ /-3x$$

$$2y = -3 - 3x \ \ /\div 2$$

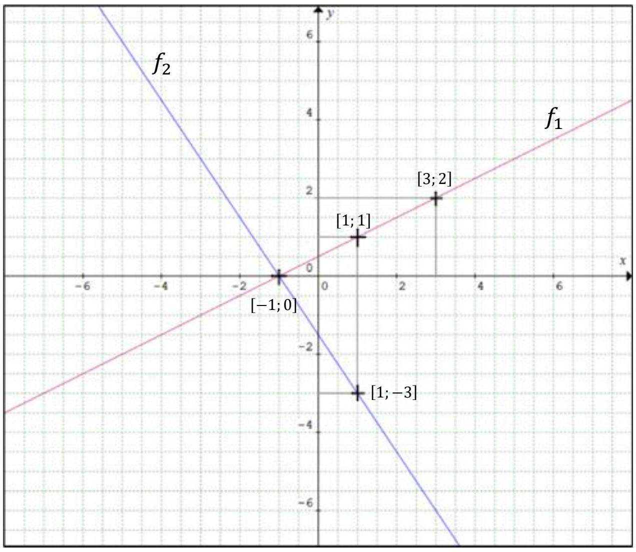
$$f_2\colon y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

Do každého z předpisu funkce si dosadíme libovolná dvě čísla (pro určení přímky nám stačí dva body) za nezávislou proměnnou x a dopočítáme závislou proměnnou y. Nejpřehlednější je zapsat si náš výběr do tabulek:

x	1	3
y	1	2

x	–1	1
y	0	–3

Body zakreslíme do Kartézské soustavy souřadnic. Propojením bodů nám vznikly dvě přímky f_1 a f_2. Jejich průsečíkem je pak řešení soustavy rovnic.

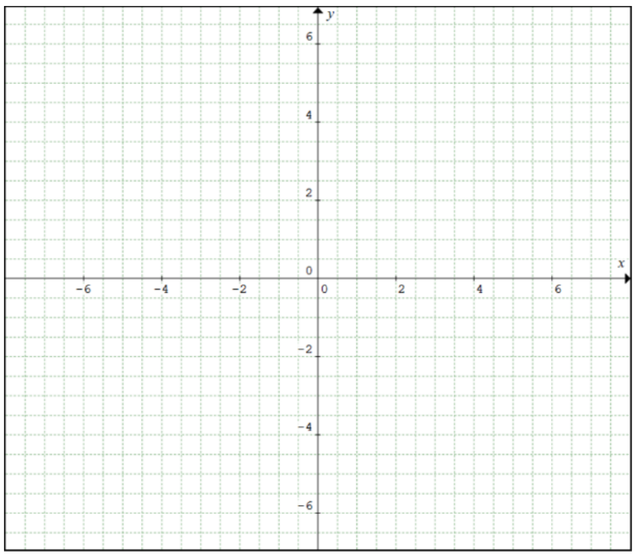


Z grafu je vidět, že průsečíkem je uspořádaná dvojice $\underline{[x; y] = [-1; 0]}$.

Úlohy na procvičení – vše řešte grafickou metodou:

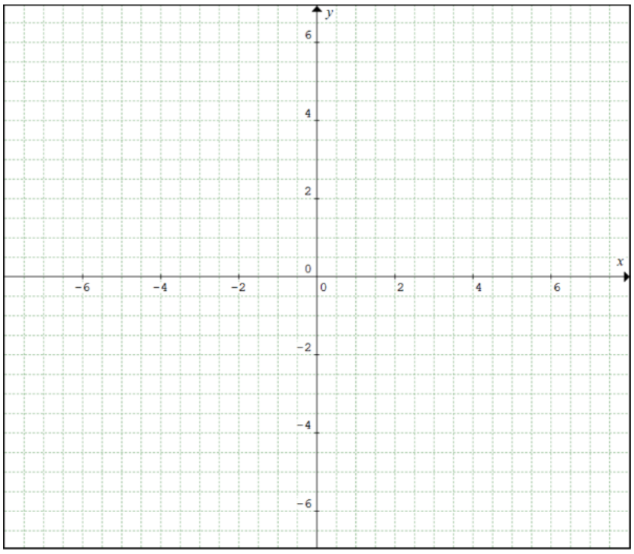
1)

$$-x + 3y = 1$$
$$\underline{4x + y = 9}$$



2)

$$\begin{aligned} 0{,}5x - 3y &= -8 \\ 6x + \frac{1}{3}y &= 13 \end{aligned}$$



PRACOVNÍ LIST – SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC (4)

V tomto pracovním listu se zaměříme na řešení soustav třech lineárních rovnic o třech neznámých.

Soustavy lineárních rovnic můžeme řešit různými metodami, např.:

- dosazovací;
- sčítací.

Metodu grafickou můžeme u těchto soustav použít, ale zakreslení řešení již není tak snadné. Opět můžeme používat i kombinaci výše uvedených metod řešení.

V tomto pracovním listu se zaměříme na první z těchto metod, a to na metodu *dosazovací*. Její princip je, že z jedné z rovnic vyjádříme jednu z neznámých (ideálně tu, co jde nejlépe), a tu poté dosadíme do zbylých dvou rovnic. Tímto dosazením získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, které už umíme řešit. Po vyřešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých nesmíme zapomenout dosadit do vyjádření první neznámé, které jsme si určili na počátku.

Řešením soustavy třech lineárních rovnic o třech neznámých je uspořádaná trojice čísel (pozor na pořadí!).

Př.: Řešte soustavu třech lineárních rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$2x - 4y + 3z = 9$$

$$-x + 2y + z = -2$$

$$\underline{3x + 3y - z = -1}$$

Ze zadání je vidět, že „ideální" neznámou pro vyjádření je neznámá x (anebo z) z druhé rovnice (lze i vyjádřit z ze třetí rovnice), protože koeficient před nimi je roven ± 1.

My si pro vyjádření vybereme druhou rovnici a vyjádříme neznámou x tak, že vše mimo x převedeme na pravou stranu rovnice a následně vynásobíme -1:

$$-x = -2y - z - 2 \quad / \cdot (-1)$$

$$x = 2y + z + 2$$

Takto vyjádřenou neznámou dosadíme do první a třetí rovnice, se kterými jsme zatím nepracovali:

$$2(2y + z + 2) - 4y + 3z = 9$$

$$\underline{3(2y + z + 2) + 3y - z = -1}$$

Po dosazení provedeme všechny naznačené operace:

$$4y + 2z + 4 - 4y + 3z = 9$$

$$\underline{6y + 3z + 6 + 3y - z = -1}$$

$$5z = 5 \ / \div 5$$

$$\underline{9y + 2z = -7}$$

V první rovnici nám po dosazení vypadla neznámá y, takže můžeme okamžitě dopočítat neznámou z, kterou poté dosadíme do třetí upravené rovnice:

$$\underline{z = 1}$$

$$9y + 2 \cdot 1 = -7$$

$$9y + 2 = -7 \quad /-2$$

$$9y = -9 \quad /\div 9$$

$$\underline{y = -1}$$

Vypočtené neznámé nakonec dosadíme do vyjádření neznámé x, a tím získáme již výsledné řešení:

$$x = 2(-1) + 1 + 2$$

$$\underline{x = 1}$$

Z výpočtů jsme nalezli řešení, kterým je uspořádaná trojice $\underline{\underline{[x; y; z] = [1; -1; 1].}}$

Úlohy na procvičení – vše řešte dosazovací metodou:

---

1)

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= -1 \\ 2x - 4y + z &= -1 \\ \underline{4x + y - 3z} &\underline{= 12} \end{aligned}$$

2)

$$0{,}5x - 3y - 4z = -8$$
$$-x + 4y + z = 10$$
$$3x + \frac{1}{3}y + 6z = 7$$

Řešení: 1) [2; 1; −1] ;2) [2; 3; 0]

Pracovní list – Soustavy lineárních rovnic (5)

V tomto pracovním listu se zaměříme na řešení soustav třech lineárních rovnic o třech neznámých.

Soustavy lineárních rovnic můžeme řešit různými metodami, např.:

- dosazovací;
- sčítací.

Metodu grafickou můžeme u těchto soustav použít, ale zakreslení řešení již není tak snadné. Opět můžeme používat i kombinaci výše uvedených metod řešení.

V tomto pracovním listu se zaměříme na druhou z těchto metod, a to na metodu *sčítací*. Její princip je, že každou libovolnou různou dvojici z rovnic vynásobíme takovým reálným číslem, aby se nám po součtu těchto rovnic odečetla jedna z neznámých. Toto provedeme dvakrát tak, aby se nám vždy odečetla stejná neznámá. Po sečtení rovnic tak získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, které už umíme řešit. Po vyřešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých nesmíme zapomenout dopočítat poslední neznámou, která se nám odečetla na začátku.

Řešením soustavy třech lineárních rovnic o třech neznámých je uspořádaná trojice čísel (pozor na pořadí!).

Př.: Řešte soustavu třech lineárních rovnic o třech neznámých sčítací metodou a po výpočtu první neznámé libovolnou metodou:

$$2x - 4y + 3z = 9$$

$$-x + 2y + z = -2$$

$$\underline{3x + 3y - z = -1}$$

Jako první dvojici rovnic si vybereme druhou a třetí s tím, že druhou rovnici vynásobíme číslem 3 a sečteme se třetí rovnicí:

$$-x + 2y + z = -2 \quad /\cdot 3$$

$$\underline{3x + 3y - z = -1}$$

$$-3x + 6y + 3z = -6$$

$$\underline{3x + 3y - z = -1}$$

$$9y + 2z = -7$$

Tím jsme získali první rovnici do nové soustavy.

Jako druhou dvojici rovnic ze zadání si vybereme první dvě s tím, že druhou rovnici vynásobíme číslem 2 a sečteme:

$$2x - 4y + 3z = 9$$

$$\underline{-x + 2y + z = -2 \quad /\cdot 2}$$

$$2x - 4y + 3z = 9$$

$$\underline{-2x + 4y + 2z = -4}$$

$$5z = 5$$

Zde se nám v součtu rovnic odečetly rovnou dvě neznámé, takže nyní můžeme buď řešit soustavu nově získaných rovnic, anebo rovnou vypočítat neznámou z a postupně ji dosazovat do získaných rovnic během výpočtu (odspodu nahoru).

Vybereme si druhou možnost, tj. vypočítáme neznámou z:

$$\underline{z = 1}$$

Dosadíme do první získané rovnice za pomocí dosazovací metody, tj.:

$$9y + 2z = -7$$

$$9y + 2 \cdot 1 = -7$$

$$9y + 2 = -7 \quad /-2$$

$$9y = -9 \quad /\div 9$$

$$\underline{y = -1}$$

Poslední neznámou můžeme získat tak, že opět vybereme libovolné dvě kombinace rovnic a použijeme na ně sčítací metodu. Nebo vybereme libovolnou rovnici ze zadání a dosadíme vypočítané neznámé tak, abychom získali chybějící neznámou:

$$-x + 2y + z = -2$$

$$-x + 2 \cdot (-1) + 1 = -2$$

$$-x - 2 + 1 = -2 \quad /+2 - 1$$

$$-x = -1 \quad /\div (-1)$$

$$\underline{x = 1}$$

Z výpočtů jsme nalezli řešení, kterým je uspořádaná trojice $\underline{\underline{[x; y; z] = [1; -1; 1].}}$

Úlohy na procvičení – řešte sčítací metodou pro zjištění první neznámé a poté libovolnou metodou:

1)

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= -1 \\ 2x - 4y + z &= -1 \\ \underline{4x + y - 3z} &\underline{= 12} \end{aligned}$$

2)

$$
\begin{aligned}
0{,}5x - 3y - 4z &= -8 \\
-x + 4y + z &= 10 \\
3x + \frac{1}{3}y + 6z &= 7
\end{aligned}
$$

Řešení: 1) $[2; 1; -1]$;2) $[2; 3; 0]$

PRACOVNÍ LIST – SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC (6)

V tomto pracovním listu se zaměříme na řešení soustav třech lineárních rovnic o třech neznámých.

Soustavy lineárních rovnic můžeme řešit různými metodami, např.:

- dosazovací;
- sčítací.

Metodu grafickou můžeme u těchto soustav použít, ale zakreslení řešení již není tak snadné. Opět můžeme používat i kombinaci výše uvedených metod řešení.

V tomto pracovním listu si ukážeme, jak jinak se dají soustavy rovnic řešit za pomoci tzv. matic, pro které nám stačí znalosti 1. stupně základní školy.

Řešit soustavy rovnic můžeme za pomoci znalosti matic, a to tak, že si jednotlivé koeficienty neznámých přepíšeme do řádků a sloupců (matice), a ty poté jednoduše eliminujeme pomocí základních aritmetických operací.

Řešením soustavy třech lineárních rovnic o třech neznámých je uspořádaná trojice čísel (pozor na pořadí!).

Př.: Řešte soustavu třech lineárních rovnic o třech neznámých pomocí matic:

$$2x - 4y + 3z = 9$$

$$-x + 2y + z = -2$$

$$\underline{3x + 3y - z = -1}$$

Jak jsme již naznačili v úvodním textu, přepíšeme si koeficienty jednotlivých neznámých do matice (tabulky), kde jednotlivé řádky budou znamenat rovnice a sloupce poté jednotlivé neznámé:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

V prvním řádku vidíme koeficienty z první rovnice, v druhém z druhé a v posledním ze třetí rovnice. Stejně tak je tomu se sloupcích. V prvním sloupci vidíme koeficienty, které stojí ve všech rovnicích u neznámé x, v druhém u y a ve třetím u z. Za čárou, kterou značíme „rovná se" vidíme absolutní členy rovnic, které mi v rovnicích stojí na pravé straně.

Pokud máme takto poskládanou matici, využijeme znalostí základních aritmetických operací, a to tak, že budeme jednotlivé řádky násobit vhodným číslem takovým, aby se mi po součtu dvou řádků vždy odečetla jedna neznámá (podobně jako u sčítací metody).

V prvním kroku budeme eliminovat neznámou x tak, aby mi v prvním řádku zůstalo číslo dva a všechny další řádky začínaly číslem 0.

Začneme tím, že vynásobíme druhý řádek číslem 2 a sečteme jej s prvním řádkem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Stejný postup uděláme s prvním a třetím řádkem. Zde je to však složitější, protože musíme první řádek vynásobit číslem 3 a třetí řádek číslem -2 (viz druhá matice ve výpočtu) a až poté sečíst. První řádek však vždy necháváme v původním tvaru, proto třetí matice výpočtu má již první řádek stejný jako v úvodu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ -6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -18 & 11 & 29 \end{array}\right)$$

Těmito úpravami jsme se „zbavili" první neznámé ve druhé a třetí rovnici. Dalším krokem je eliminace druhé neznámé v týž rovnicích. Ve výpočtu je však vidět, že neznámá y se mi v druhém řádku odečetla již při předchozích úpravách, takže stačí jen prohodit druhý a třetí řádek a máme matici upravenou na „schodovitý" tvar, ze kterého umíme vypočítat postupným dosazováním jednotlivé neznámé (zdola nahoru).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & -18 & 11 & 29 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Z posledního řádku nám vychází rovnice:

$$5z = 5$$

$$\underline{z = 1}$$

Z druhého řádku nám vyšla rovnice:

$$-18y + 11z = 29$$

Do ní můžeme dosadit vypočtenou neznámou z a tím dostaneme hodnotu neznámé y:

$$-18y + 11 \cdot 1 = 29$$

$$-18y + 11 = 29 \quad /-11$$

$$-18y = 18 \quad /\div(-18)$$

$$\underline{y = -1}$$

A zbývá dosadit do prvního řádku, tj. do rovnice:

$$2x - 4y + 3z = 9$$

$$2x - 4(-1) + 3 \cdot 1 = 9$$

$$2x + 4 + 3 = 9 \quad /-7$$

$$2x = 2$$

$$\underline{x = 1}$$

Z výpočtů jsme nalezli řešení, kterým je uspořádaná trojice $\underline{\underline{[x; y; z] = [1; -1; 1]}}$.

Úlohy na procvičení – vše řešte pomocí matic:

1)

$$-x + 3y + 2z = -1$$
$$2x - 4y + z = -1$$
$$\underline{4x + y - 3z = 12}$$

2)

$$
\begin{aligned}
0{,}5x - 3y - 4z &= -8 \\
-x + 4y + z &= 10 \\
3x + \frac{1}{3}y + 6z &= 7
\end{aligned}
$$

Řešení: 1) $[2; 1; -1]$;2) $[2; 3; 0]$

Pracovní list – Soustavy lineárních rovnic (7)

V tomto pracovním listu se zaměříme na řešení soustav lineárních rovnic.

Pokud máme více rovnic než tři, a i více neznámých, lze použít jako v předchozích listech metodu sčítací nebo dosazovací. Metoda dosazovací je v tomto případně často efektivnější než sčítací. Lze ale také použít počítání soustavy pomocí matic (jak již bylo ukázáno v přechozím pracovním listě).

Jestliže máme stejný počet rovnic a stejný počet neznámých, vyjde nám většinou jedno konkrétní řešení.

Může se však stát, že jedna z rovnic je násobkem ostatních rovnic. Tím soustava má nekonečně mnoho řešení, kterým ale za pomoci výpočtu udáme přesný tvar.

Dále se může se také stát, že při výpočtu vyjde levá strana nulová a pravá nenulová. To značí, že soustava nemá řešení.

Př.: Řešte soustavu rovnic:

$$3x + y - z \qquad = 2$$

$$2x - 4y \qquad - w = 3$$

$$-x + 2y + 3z + w = 1$$

$$-2x + 4y + 6z - w = 5$$

Postupovat budeme stejně, jako u soustav třech rovnic o třech neznámých, s tím, že tentokrát v matici budeme mít čtyři řádky (čtyři rovnice) a pět sloupců (čtyři neznámé + absolutní členy).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Pokud nám první řádek nezačíná číslem ± 1, můžeme řádky libovolně přeházet tak, aby první řádek začínal tímto číslem. Pak začneme upravovat matici tak, aby se ze všech řádků (mimo prvního) eliminovala první neznámá (první řádek vynásobíme trojkou a přičteme ke druhému řádku, první řádek vynásobíme dvojkou a přičteme ke třetímu řádku, první řádek vynásobíme mínus dvojkou a přičteme ke čtvrtému řádku):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3-3 & 1+6 & -1+9 & 0+3 & 2+3 \\ 2-2 & -4+4 & 0+6 & -1+2 & 3+2 \\ -2+2 & 4-4 & 6-6 & -1-2 & 5-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Po prvním výpočtu jsme dostali ve všech řádcích (kromě prvního) na první místo nulu.

Další krok výpočtu je, že první dva řádky opíšeme, a u třetího a čtvrtého řádku se budeme pomocí výpočtu dostat nulu i na druhé místo (do druhého sloupce). V našem případě se tak již stalo, tudíž není nutné tento krok dělat.

Posledním krokem je opsat první tři řádky a u čtvrtého řádku pomocí výpočtů dostat nulu i na třetí místo (do třetího sloupce). V našem případě se tak již také stalo.

Tím jsme dostali matici ve „schodovitém" tvaru, kde všude pod diagonálou jsou nuly. Můžeme tedy začít počítat neznámé, a to tak, že půjdeme v matici zdola nahoru a budeme počítat jednotlivé rovnice.

Ze čtvrtého řádku nám vyjde rovnice:

$$-3w = 3 \ \ /\div(-3)$$

$$\underline{w = -1}$$

Vypíšeme si rovnici ze třetího řádku a dosadíme do ní již zjištěnou hodnotu neznámé w.

$$6z + w = 5$$

$$6z + (-1) = 5$$

$$6z - 1 = 5 \ \ /+1$$

$$6z = 6 \ \ /\div 6$$

$$\underline{z = 1}$$

Stejně pokračujeme s druhým řádkem, tedy:

$$7y + 8z + 3w = 5$$

$$7y + 8 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 5$$

$$7y + 8 - 3 = 5 \ \ / -5$$

$$7y = 0 \ \ /\div 7$$

$$\underline{y = 0}$$

Poslední výpočet provedeme v prvním řádku matice dosazením všech hodnot, které jsme vypočítali:

$$-x + 2y + 3z + w = 1$$

$$-x + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) = 1$$

$$-x + 0 + 3 - 1 = 1 \ \ /-2$$

$$-x = -1 \ \ /\div(-1)$$

$$\underline{x = 1}$$

Z výpočtů jsme nalezli řešení, kterým je uspořádaná čtveřice $\underline{[x; y; z; w] = [1; 0; 1; -1].}$

Úloha na procvičení – řešte pomocí matic:

1)

$$\begin{aligned} x \qquad - z + 2w &= 1 \\ 3x + 2y \qquad - w &= 0 \\ -x + y - z + w &= -3 \\ 9x - 3y + 4z \qquad &= 20 \end{aligned}$$

Řešení: 1) $[1; -1; 2; 1]$