Poziční číselné soustavy

Naďa Horáková

Klíčová aktivita „Podpora gramotností“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Anotace

Tento materiál se zabývá pozičními číselnými soustavami, a to převážně dvojkovou a šestnáctkovou soustavou včetně jejich využití v oblasti informatiky – mimo matematiku lze tedy tento materiál využít i v informatice. Materiál je vhodný pro druhý stupeň základní školy.

V textu lze kromě uceleného výkladu pozičních číselných soustav nalézt také několik cvičení, jejichž řešení jsou uvedena v poslední kapitole.

Obsah

1 Číselné soustavy

Číselná soustava je způsob, jakým zapisujeme **čísla**. K zápisu používáme znaky, které nazýváme **číslice**.

Nejjednodušší číselnou soustavou je jedničková soustava, která obsahuje pouze jeden znak (tím už může být cokoliv, například znak |). Pokud bychom chtěli zapsat, že máme tři jablka, tak by to mohlo vypadat takto: „||| jablka“. I přesto, že je tento systém zapisování čísel velmi primitivní, neznamená to, že by se vůbec nepoužíval. Uvažme například lístek v restauraci, na který obsluha zapisuje počet vypitých nápojů.

Je však jasné, že jedničková soustava je velmi nepraktická pro zápis větších čísel. Z toho důvodu používáme číselné soustavy, které využívají více znaků.

1.1 Poziční soustavy

Poziční číselnou soustavu charakterizujeme počtem číslic, které v dané soustavě můžeme použít. U **desítkové** soustavy, se kterou běžně počítáme, používáme **deset** číslic (0–9), **dvojková** soustava má pouze **dvě** číslice (0 a 1), **šestnáctková** soustava jich má **16**, **osmičková 8** atd.

V poziční soustavě záleží na místě – pozici, na kterém se číslice v čísle nachází. Je zřejmé, že čísla 123 a 321 jsou různá, a to i přesto, že obsahují stejné číslice.

1.2 Nepoziční soustavy

U nepoziční číselné soustavy nezáleží na pořadí číslic. Představme si například, že bychom používali pouze číslice (znaky) A, B, C, D, jejichž hodnoty jsou $A = 1,\ B = 10,\ C = 100,\ D = 1\,000$. Pokud bychom chtěli zapsat číslo 2 541, tak bychom to mohli udělat několika způsoby: $DDCCCCCBBBBA$ nebo $ABBBBCCCCCDD$ nebo $DCDCCCCBABBB$ atd.

Př.: Kam byste zařadili římské číslice a kuličkové počítadlo? Své rozhodnutí odůvodněte.

Římská číselná soustava je na pomezí poziční a nepoziční soustavy. Je zřejmé, že římskou číselnou soustavu používáme podobně jako příklad nepoziční soustavy výše – používáme symboly I, V, X, L, C, D, M, které skládáme za sebe podle toho, kolik tisíců, stovek, padesátek atd. se v čísle vyskytuje. Nicméně musíme si uvědomit, že na pořadí symbolů záleží – je rozdíl mezi čísly IX a XI.
Kuličkové počítadlo je také kombinací poziční a nepoziční soustavy. Je možné kuličkové počítadlo používat tak, že počítáme pouze počet kuliček na jedné straně drátů (tj. nepozičně) nebo můžeme každý drát považovat za jeden řád a pomocí kuliček určovat, kolikrát je daný řád v čísle obsazen.

Př.: Jaké výhody mají poziční soustavy? Proč se od nepozičních soustav v praktickém počítání zcela upustilo?

U pozičních číselných soustav můžeme snadno porovnávat čísla – ihned vidíme, že číslo 1 562 *je větší než číslo* 1 652*, ale pokud bychom tato dvě čísla zapsali pomocí symbolů A, B, C, D z příkladu výše, tak by nám porovnávání činilo potíže, posuďte sami: $DCCCCCBBBBBBAA$ a $DCCCCCCBBBBBAA$.*
Na předchozím příkladu také vidíme, že poziční soustavy zkracují zápis čísel. Dalším důvodem

k používání pozičních soustav je jednodušší provádění aritmetických operací – sčítání, odčítání, násobení, dělení atd.

2 Dvojková soustava

Dvojková soustava (binární soustava) je soustava o základu 2. V této soustavě si vystačíme se dvěma číslicemi – nulou a jedničkou.

Příkladem čísla zapsaného ve dvojkové soustavě může být číslo $(1011)_2$. Číslo 1011 píšeme do kulatých závorek s dolním indexem proto, abychom snadno rozeznali, ve které číselné soustavě je číslo zapsáno. Číslo $(1011)_2$ je rovno číslu $(11)_{10}$.

Př. 1: Kolik existuje ve dvojkové soustavě nejvýše dvouciferných (trojciferných, šesticiferných, osmiciferných) čísel?

2.1 Převod z dvojkové soustavy do desítkové

Jak můžeme převést číslo ze dvojkové soustavy do desítkové? Nejdříve si připomeňme, co je to **rozvinutý zápis čísla** v desítkové soustavě. Uvažujme třeba číslo 1 025. Rozvinutým zápisem čísla 1 025 rozumíme následující součet

$$1\,025 = 1 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1.$$

My si ještě tento zápis upravíme pomocí mocnin čísla 10:

$$\overset{3}{1}\,\overset{2}{0}\overset{1}{2}\overset{0}{5} = 1 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{3} + 0 \cdot \underbrace{10 \cdot 10}_{2} + 2 \cdot \underbrace{10}_{1} + 5 \underbrace{\quad}_{0} = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Malá čísla nad ciframi čísla 1 025 představují exponenty základu 10 daného řádu čísla. Pomocí stejného principu můžeme rozepsat každé číslo v libovolné soustavě, změní se pouze základ (tedy u dvojkové soustavy bude základ 2, u pětkové soustavy základ 5 atd.). Tímto způsobem můžeme rozepsat i číslo $(1011)_2$. Jediným rozdílem bude, že místo základu 10 použijeme základ 2:

$$(\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{1})_2 = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} + 0 \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2} + 1 \cdot \underbrace{2}_{1} + 1 \underbrace{\quad}_{0} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Pokud číselný výraz výše vypočteme, tak obdržíme číslo 11 – už v desítkové soustavě.

Pokud tedy chceme převést číslo ze dvojkové soustavy do desítkové, tak si dané číslo zapíšeme pomocí rozvinutého zápisu, vypočteme a máme hotovo.

Př. 2: Převeď čísla z dvojkové soustavy do desítkové

(a) $(110)_2$

(b) $(10101)_2$

Př. 3: Jak lze snadno poznat, zda je dané číslo zapsané ve dvojkové soustavě liché či sudé?

Př. 4: Urči (bez převodu do desítkové soustavy), které z čísel je větší. Své odpovědi odůvodni, využij při tom vlastností pozičních soustav.

(a) $(1000)_2$ a $(100)_2$

(b) $(1101)_2$ a $(1100)_2$

Př. 5: Seřaď následující čísla od nejmenšího k největšímu:

$$(11101)_2, (1110)_2, (11111)_2, (11110)_2, (1111)_2, (11000)_2$$

2.2 Převod z desítkové soustavy do dvojkové

Př.: Zkus vymyslet způsob, jakým převedeš číslo 15 z desítkové soustavy do dvojkové.

2.2.1 1. metoda

Jednou z možností je „najít“ v čísle 15 největší mocninu dvojky. Zkusíme: $2^4 = 16$, to je moc, $2^3 = 8$ – tu už do čísla 15 určitě „nacpeme“. Je tedy:

$$15 = 1 \cdot 2^3 + 7 \quad \text{(zbylo nám sedm)}$$

Nyní totéž provedeme pro číslo 7. Do čísla 7 se jistě vleze $2^2 = 4$, proto je

$$15 = 1 \cdot 2^3 + \underbrace{1 \cdot 2^2 + 3}_{7} \quad \text{(a ještě nám zbyla trojka)}$$

Do čísla 3 se vleze $2^1 = 2$, proto

$$15 = 1 \cdot 2^3 + \underbrace{1 \cdot 2^2 + \underbrace{1 \cdot 2 + 1}_{3}}_{7} \quad \text{(zbývá jednička)}$$

Do čísla 1 už se žádná dvojka nevleze, necháme ji tedy tak. Je tedy:

$$(15)_{10} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1111)_2$$

2.2.2 2. metoda

První metodu můžeme celkem snadno používat pro malá čísla. Představme si ale, že bychom chtěli převést z desítkové do dvojkové soustavy číslo 2 354 670. To už by nám pravděpodobně činilo problémy. Ukážeme si proto postup, pomocí kterého můžeme snadno převést i velká čísla.

Než přejdeme k samotnému algoritmu, podívejme se na následující operace s číslem 123 v desítkové soustavě – budeme dělit desítkou a sledujeme zbytky po dělení:

$$123 : 10 = \underbrace{12}_{\text{podíl}}, \quad \text{zbytek } \boxed{3}$$

$$12 : 10 = \underbrace{1}_{\text{podíl}}, \quad \text{zbytek } \boxed{2}$$

$$1 : 10 = \underbrace{0}_{\text{podíl}}, \quad \text{zbytek } \boxed{1}$$

Pokud tedy vydělíme číslo 123 deseti, obdržíme podíl 12 a zbytek $\boxed{3}$. Když postup zopakujeme, tedy vydělíme číslo 12 deseti, získáme podíl 1 a zbytek $\boxed{2}$. Dělením deseti vlastně postupně „ukusujeme“ z čísla 123 a cestou „sbíráme“ zbytky, které nejsou ničím jiným než ciframi čísla 123 – cifry však sbíráme v opačném pořadí. Zkusme tento postup použít při převodu z desítkové do dvojkové soustavy. Místo dělení číslem 10 budeme ale dělit číslem 2 (budeme tedy dělit základem dané soustavy). Zkusíme postup na čísle 11:

$$11 : 2 = 5, \quad \text{zbytek } \boxed{1}$$

$$5 : 2 = 2, \quad \text{zbytek } \boxed{1}$$

$$2 : 2 = 1, \quad \text{zbytek } \boxed{0}$$

$$1 : 2 = 0, \quad \text{zbytek } \boxed{1}$$

Nulu už nemá smysl dělit dále. Pokud přečteme zbytky odspoda nahoru, tak obdržíme zápis čísla 11 ve dvojkové soustavě. Je tedy

$$(11)_{10} = (1011)_2.$$

Výsledek si můžeme ověřit

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = (11)_{10}.$$

Př. 6: Převeď z desítkové do dvojkové soustavy:

(a) $(79)_{10}$

(b) $(40)_{10}$

2.3 Sčítání ve dvojkové soustavě

Sčítání ve dvojkové soustavě provádíme úplně stejně jako v desítkové soustavě. Ukažme si nejdříve sčítání **jednociferných čísel**:

$$\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \\
1 + 0 &= 1 \\
1 + 1 &= 2 \longrightarrow \text{ale dvojku už ve dvojkové soustavě nemáme, musíme proto} \\
& \text{přidat další cifru vyššího řádu:} \\
1 + 1 &= 10 \quad \text{(je to podobné jako v desítkové soustavě: 9 + 1 = 10)}
\end{aligned}$$

Ukážeme si ještě sčítání **dvojciferných čísel**:

$$\begin{aligned}
10 + 1 &= 11 \\
11 + 1 &= 12 \longrightarrow \text{to ale nelze, musíme přidat další cifru vyššího řádu:} \\
11 + 1 &= 100 \quad \text{(je to podobné jako v desítkové soustavě: 99 + 1 = 100)}
\end{aligned}$$

Ukážeme si i **sčítání pod sebou**:

$$\begin{array}{r} 101 \\ 10 \\ \hline 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 11 \\ \hline 1010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ 101 \\ \hline 10000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111 \\ 1 \\ \hline 10000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10011 \\ 1010 \\ \hline 11101 \end{array}$$

Př. 7: Doplň volná místa:

$$\begin{array}{r} 101 \\ *** \\ \hline 1001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11*** \\ 1111 \\ \hline 101000 \end{array}$$

Obdobným způsobem funguje i odčítání a násobení, podívejte se na příklady:

$$\begin{array}{r} 111\\ -10\\ \hline 101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100\\ -1\\ \hline 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101\\ -110\\ \hline 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111\\ \cdot 11\\ \hline 111\\ 111\\ \hline 10101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001\\ \cdot 10\\ \hline 10010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011\\ \cdot 11\\ \hline 1011\\ 1011\\ \hline 100001 \end{array}$$

2.4 Užití dvojkové soustavy

S dvojkovou soustavou se setkáváme ve výpočetní technice. Nejmenší jednotkou informace je 1 **bit** – buď něco je, nebo něco není (buď prochází proud, nebo neprochází proud). Z tohoto důvodu je vhodné, aby počítače pracovaly právě ve dvojkové soustavě – buď proud prochází (tento stav může reprezentovat číslo 1), nebo neprochází (0).

Podívejme se, kolika různých hodnot může nabývat určitý počet bitů. Jeden bit může nabývat pouze dvou různých hodnot: 1 a 0. Dva bity už mohou nabývat 4 různých hodnot: 00, 01, 10, 11. Tři bity mohou nabývat 8 různých hodnot, čtyři bity 16 různých hodnot atd.

Řetězec osmi bitů se nazývá 1 **byte** (čteme bajt), příkladem může být třeba řetězec (00000011). Z osmi bitů lze vytvořit 256 kombinací – takový počet stačí pro rozlišení velkých i malých písmen anglické abecedy, číslic i některých interpunkčních znamének. Vymyslely se proto kódy, který přiřadily každému znaku nějakou číselnou hodnotu mezi 0 a 255, každý znak tak byl uložen do jednoho bytu. Pravděpodobně nejznámějším takovým kódem je ASCII (American Standard Code for Information Interchange, americký standardní kód pro výměnu informací).

2.4.1 ASCII

Původní ASCII tabulka nebyla osmibitová, ale pouze sedmibitová – obsahovala pouze 128 znaků. Pro potřeby dalších jazyků se ale používá osmibitové rozšíření ASCII.

Podívejte se na ASCII tabulku zde: `https://www.ascii-code.com/`.

Například znak **A** má hodnotu $(65)_{10}$ neboli $(01000001)_2$ (číslo ve dvojkové soustavě by samozřejmě mohlo být zapsáno bez počáteční nuly, s nulou lze ale lépe vidět, že se opravdu jedná o osmibitový kód).

2.4.2 Příklady jednoduchého šifrování v binární soustavě

Nejjednodušším příkladem šifrování je převedení pořadí písmene anglické abecedy na binární kód. Například písmenu A se přiřadí číslo 1 v desítkové soustavě, v binární soustavě má pak přiřazeno číslo $(1)_2$. Číslo D je čtvrtým písmenem v anglické abecedě, proto bude v desítkové soustavě šifrováno číslem 4 a v binární soustavě číslem $(100)_2$.

Př. 8: Kolik potřebujeme pozic (bitů) na zakódování všech písmen anglické abecedy?

Př. 9: Kolik potřebujeme pozic (bitů) na zakódování všech písmen české abecedy (včetně písmen s diakritikou)?

O něco složitější šifrou je transpoziční šifra spočívající v prohození sousedních písmen. My – nebo počítač – můžeme použít i binární verzi této šifry: nejdříve si text převedeme podle ASCII do binární podoby a poté prohodíme sousední číslice. Chceme například zašifrovat slovo „AHOJ“. Podle ASCII převedeme text do binárního kódu:

A H O J = 01000001 01001000 01001111 01001010

Po prohození sousedních číslic obdržíme následující posloupnost jedniček a nul:

10000010 10000100 10001111 10000101

Tato posloupnost 32 binárních číslic se pošle příjemci. Ten po přijetí provede opačnou transpozici a pomocí ASCII převede čísla na text.

Zajímavostí šifrování v binární soustavě je, že transpozice se může odehrát uvnitř písmene.

Dalším příkladem jednoduchého šifrování je Vernamova šifra v binární variantě. Vernamova šifra spočívá v posunu každého znaku zprávy o náhodně zvolený počet míst v abecedě. To se v podstatě rovná náhradě zcela náhodným písmenem a na tomto faktu je založen důkaz, že Vernamova šifra je v principu nerozluštitelná. Jakým způsobem funguje Vernamova šifra v binární variantě?

Text, který chceme zašifrovat (opět budeme pracovat se slovem „AHOJ“), se nejdříve převede podle ASCII do binárního kódu. Dále se zvolí nějaký klíč, podle kterého budeme šifrovat – my si zvolíme například slovo „KUBA“ (v praxi by samozřejmě měl být klíč náhodný). Tento klíč také převedeme do binární podoby, získáváme

A H O J = 01000001 01001000 01001111 01001010
K U B A = 01001011 01010101 01000010 01000001

Nyní budeme **sčítat** číslice, které jsou pod sebou. Sčítání si trochu zjednodušíme – v případě, že budeme sčítat dvě jedničky, tak výsledkem nebude $(10)_2$, ale pouze 0. Budeme se tedy držet pravidel

$0 + 0 = 0$ $\quad$ $1 + 0 = 1$ $\quad$ $0 + 1 = 1$ $\quad$ $1 + 1 = 0$

Po sečtení obdržíme posloupnost

00001010 00011101 00001101 00001011

Dešifrování se provede snadno – vezme se zašifrovaná posloupnost jedniček a nul a přičte se k ní klíč. Poté se binární kód převede na text.

Šifrování si mohou studenti vyzkoušet na jednodušších příkladech – není nutné využívat ASCII tabulku, ale stačí písmenům A–Z přiřadit čísla od 1 po 26, tj. čísla $(00001)_2$ *až* $(11010)_2$*.*

3 Šestnáctková soustava

Šestnáctková soustava (hexadecimální) je soustava o základu 16. V této soustavě si už nevystačíme pouze s číslicemi 1–9, ale musíme je doplnit písmeny A–F. Písmena A–F mají hodnoty 10–15:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \overset{10}{A}, \overset{11}{B}, \overset{12}{C}, \overset{13}{D}, \overset{14}{E}, \overset{15}{F}$$

Příkladem čísla zapsaného v šestnáctkové soustavě je $(6F)_{16} = (111)_{10}$.

Př. 10: Kolik existuje v šestnáctkové soustavě lichých dvojciferných čísel?

Postup převodu ze šestnáctkové soustavy do desítkové a naopak je analogický s převodem z dvojkové soustavy a naopak, proto v následujících podkapitolách nebude uvedeno vysvětlení daného postupu.

3.1 Převod z šestnáctkové do desítkové soustavy

Ukažme si na příkladu převod z šestnáctkové do desítkové soustavy:

$$(\overset{2}{B}\overset{1}{A}\overset{0}{1})_{16} = B \cdot \underbrace{16 \cdot 16}_{2} + A \cdot \underbrace{16}_{1} + 1 \underbrace{\quad}_{0} = B \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0$$

$$(BA1)_{16} = 11 \cdot \underbrace{16 \cdot 16}_{2} + 10 \cdot \underbrace{16}_{1} + 1 \underbrace{\quad}_{0} = 11 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0$$

$$(BA1)_{16} = 2\,816 + 160 + 1 = (2\,977)_{10}$$

Př. 11: Převeď číslo $(AA2)_{16}$ do desítkové soustavy.

Př. 12: Převeď číslo $(150)_{16}$ do desítkové soustavy.

3.2 Převod z desítkové do šestnáctkové soustavy

Ukažme si na příkladu převod z desítkové do šestnáctkové soustavy: $(1\,264)_{10}$

$$\begin{aligned} 1\,264 : 16 &= 79, \quad \text{zbytek } 0 \longrightarrow 0 \\ 79 : 16 &= 4, \quad \text{zbytek } 15 \longrightarrow \text{F} \\ 4 : 16 &= 0, \quad \text{zbytek } 4 \longrightarrow 4 \end{aligned}$$

$$(1\,264)_{10} = (4F0)_{16}$$

Př. 13: Převeď číslo z desítkové do šestnáctkové soustavy.

(a) $(175)_{10}$

(b) $(2\,604)_{10}$

3.3 Užití šestnáctkové soustavy

S šestnáctkovou soustavou se také setkáváme v informatice – například IP adresa [1] verze 6 (IPv6) je zapisována v šestnáctkové soustavě. Také se pomocí čísel v šestnáctkové soustavě kódují barvy.

3.3.1 Kódování barev

Kódování barev pomocí trojice čísel zapsaných v šestnáctkové soustavě se používá především při tvorbě webových stránek. Podívejme se, jakým způsobem kódování probíhá.

Každá barva v barevném modelu RGB (R = red, G = green, B = blue) je složena ze tří barev: červené, zelené a modré. Můžeme tedy barvu popsat pomocí trojice čísel – první číslo bude vyjadřovat jak moc červené barva obsahuje, druhé číslo potom kolik zelené obsahuje a třetí číslo kolik obsahuje modré. Pokud například červená v barvě vůbec není, tak je na místě prvního čísla 0, pokud je v barvě maximální množství červené, tak je na místě prvního čísla číslo 255 v desítkové soustavě. Každá složka výsledné barvy může tedy nabývat hodnot mezi 0 a 255. Například trojice $(255, 0, 0)$ značí červenou barvu, jelikož červené je v barvě maximum, zelenou a modrou barva neobsahuje. Takovéto míchání barev (říká se mu aditivní) si můžeme představit tak, že máme tři barevné reflektory – červený, zelený a modrý – svítící na bílé plátno. Tam, kde se světla z reflektorů překrývají, vznikají nové barvy. Například na místě, kde se překrývají světla ze zeleného a červeného reflektoru, vznikne žlutá barva. Pokud bychom chtěli získat jiné odstíny například modré barvy, tak můžeme reflektor zastínit clonou – získali bychom tak například tmavě modrou barvu s kódem $(0, 0, 128)$. Místo, na které svítí všechny tři reflektory, bude bílé. Trojice $(128, 0, 128)$ tedy značí fialovou (kombinace odstínu červené a odstínu modré), trojice $(0, 0, 0)$ černou (nesvítí ani jeden reflektor), trojice $(255, 255, 255)$ bílou (všechny tři reflektory svítí naplno).

Vidíme, že každou barvu můžeme popsat pomocí tří čísel v desítkové soustavě. V informatice se tyto trojice zapisují také pomocí šestnáctkové soustavy – každá složka může nabývat hodnot mezi $(00)_{16}$ a $(FF)_{16}$. Například kód modré barvy vypadá takto: $\#0000FF$. První dvě číslice značí množství červené, druhé dvě číslice množství zelené a poslední dvojice číslic nám říkají, kolik modré barva obsahuje. Kód fialové barvy je $\#800080$, kód červené $\#FF0000$, kód bílé $\#FFFFFF$ apod.

Pokud se chcete o barvách v informatice dozvědět více, můžete se podívat na následující odkazy:

- Barvy v HTML: `https://www.jakpsatweb.cz/html/barva.html`
- Nástroj pro výběr barev pro HTML stránky: `https://www.w3schools.com/colors/colors_picker.asp`.
- Nástroj pro výběr barevného schématu: `https://paletton.com/`.

[1] IP adresa je jednoznačné číselné označení zařízení (například počítače) připojeného k Internetu.

Př. 14: Milan měl za úkol napsat webové stránky. Jelikož neměl s psaním webových stránek zkušenosti, tak požádal kamaráda Karla, jestli by mu nepomohl. Kromě jiného Milan chtěl, aby Karel zkontroloval přidělení barev různým částem stránky. Karlův kód vypadal takto:

```
body {
    background-color: #40BF80; /* barva pozadí celé stránky: světle šedá */
    color: #000000; /* barva písma na celé stránce: černá */
}

.nadpis {
    background-color: #3973AC; /* barva pozadí nadpisů: odstín modré */
    color: #FFFFFF; /* barva písma nadpisů: bílá */
}

.tlacitko {
    background-color: #D9D9D9; /* barva pozadí tlačítek: odstín zelené */
    color: #000000; /* barva písma nadpisů: bílá */
}
```

Ještě před samotnou kontrolou webových stránek se Karel s Milanem o barvách bavil, proto si Karel zapsal kódy barev, které chtěl Milan použít, na papírek. Bohužel si je na rozdíl od Karla zapsal v desítkové soustavě:

- světle šedá: $(217, 217, 217)$
- černá: $(0, 0, 0)$
- bílá: $(255, 255, 255)$
- odstín modré: $(57, 115, 172)$
- odstín zelené: $(64, 191, 128)$

Rozhodni na základě Milanova papírku, zda zapsal Karel kódy barev do webové stránky správně, tj. zda $\#40BF80$ opravdu značí světle šedou barvu atd. Pokud kódy barev správně nezapsal, tak je oprav.

4 Další soustavy

Princip zápisu čísel v jiných soustavách je stejný jako u dvojkové či šestnáctkové soustavě.

Př. 15: Rozhodni, v jakých soustavách **nemohou** být zapsány následující čísla:

(a) 1234

(b) 910

(c) 10

Př. 16: Jak poznáme, že číslo zapsané ve trojkové, resp. čtyřkové, resp. šestnáctkové soustavě, je po převedení do desítkové soustavy dělitelné třemi, resp. čtyřmi, respektive šestnácti?

Př. 17: Převeď do desítkové soustavy:

(a) $(123)_5$

(b) $(1122)_3$

(c) $(AB3)_{12}$

(d) $(616)_7$

Př. 18: Převeď z desítkové soustavy:

(a) $(123)_{10}$ do trojkové soustavy.

(b) $(123)_{10}$ do pětkové soustavy.

(c) $(123)_{10}$ do dvanáctkové soustavy.

(d) $(123)_{10}$ do čtyřkové soustavy.

5 Řešení úloh

Př. 1: Nejvýše dvouciferných: 4, nejvýše trojciferných: 8, nejvýše šesticiferných: 64, nejvýše osmiciferných: 256.

Př. 2: (a) $\overset{2\,1\,0}{(110)_2} = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2} + 1 \cdot \underbrace{2}_{1} + 0 \underbrace{\quad}_{0} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (6)_{10}$

(b) $\overset{4\,3\,2\,1\,0}{(10101)_2} = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4} + 0 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} + 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2} + 0 \cdot \underbrace{2}_{1} + 1 \underbrace{\quad}_{0} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (21)_{10}$

Př. 3: Pokud číslo končí nulou, tak je sudé; pokud končí jedničkou, tak je liché.

Př. 4: (a) Číslo $(1000)_2$ má o jednu cifru více než číslo $(100)_2$, musí být tedy větší. Platí proto $(1000)_2 > (100)_2$.

(b) Cifry na 3., 2. a 1. pozicích jsou stejné, liší se na 0. pozicích. Platí $1 > 0$, proto $(1101)_2 > (1100)_2$.

Př. 5: $(1110)_2$, $(1111)_2$, $(11000)_2$, $(11101)_2$, $(11110)_2$, $(11111)_2$.

Př. 6: (a) $(79)_{10}$

$$\begin{aligned}
79 : 2 &= 39, && \text{zbytek } 1\\
39 : 2 &= 19, && \text{zbytek } 1\\
19 : 2 &= 9, && \text{zbytek } 1\\
9 : 2 &= 4, && \text{zbytek } 1\\
4 : 2 &= 2, && \text{zbytek } 0\\
2 : 2 &= 1, && \text{zbytek } 0\\
1 : 2 &= 0, && \text{zbytek } 1
\end{aligned}$$

$$(79)_{10} = (1001111)_2$$

(b) $(40)_{10}$

$$\begin{aligned}
40 : 2 &= 20, && \text{zbytek } 0\\
20 : 2 &= 10, && \text{zbytek } 0\\
10 : 2 &= 5, && \text{zbytek } 0\\
5 : 2 &= 2, && \text{zbytek } 1\\
2 : 2 &= 1, && \text{zbytek } 0\\
1 : 2 &= 0, && \text{zbytek } 1
\end{aligned}$$

$$(40)_{10} = (101000)_2$$

Př. 7: Na místo prvních 3 hvězdiček patří 100, na místo druhých 3 hvězdiček patří 001.

Př. 8: Anglická abeceda má 26 písmen, je proto potřeba 5 bitů (pomocí 5 bitů můžeme zakódovat až $2^5 = 32$ bitů).

Př. 9: Česká abeceda má 41 písmen (bez ch), je proto potřeba 6 bitů (pomocí 5 bitů můžeme zakódovat až $2^6 = 64$ bitů).

Př. 10: $15 \cdot 8 = 120$. Na první místo můžeme dosadit 15 číslic (všechny kromě nuly), na druhé místo jen sudé číslice, tj. 0, 2, 4, 6, 8, A, C, E.

Př. 11:

$$\overset{2\,1\,0}{(AA2)_{16}} = A \cdot \underbrace{16 \cdot 16}_{2} + A \cdot \underbrace{16}_{1} + 2 \underbrace{\quad}_{0} = A \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0$$

$$(AA2)_{16} = 10 \cdot \underbrace{16 \cdot 16}_{2} + 10 \cdot \underbrace{16}_{1} + 2 \underbrace{\quad}_{0} = 10 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0$$

$$(AA2)_{16} = 2\,560 + 160 + 2 = (2\,722)_{10}$$

Př. 12:

$$\overset{2\,1\,0}{(150)_{16}} = 1 \cdot \underbrace{16 \cdot 16}_{2} + 5 \cdot \underbrace{16}_{1} + 0 \underbrace{\quad}_{0} = 1 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0$$

$$(150)_{16} = 256 + 80 + 0 = (336)_{10}$$

Př. 13: (a)

$$\begin{aligned} 175 : 16 = 10, &\quad \text{zbytek } 15 \longrightarrow \text{F} \\ 10 : 16 = 0, &\quad \text{zbytek } 10 \longrightarrow \text{A} \end{aligned}$$

$$(175)_{10} = (AF)_{16}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2\,604 : 16 = 162, &\quad \text{zbytek } 12 \longrightarrow \text{C} \\ 162 : 16 = 10, &\quad \text{zbytek } 2 \longrightarrow 2 \\ 10 : 16 = 0, &\quad \text{zbytek } 10 \longrightarrow \text{A} \end{aligned}$$

$$(2\,604)_{10} = (A2C)_{16}$$

Př. 14: Nezapsal, přiřazení kódů v desítkové soustavě ke kódům v šestnáctkové soustavě je následující:

- světle šedá: $(217, 217, 217) = \#D9D9D9$
- černá: $(0, 0, 0) = \#000000$
- bílá: $(255, 255, 255) = \#FFFFFF$
- odstín modré: $(57, 115, 172) = \#3973AC$
- odstín zelené: $(64, 191, 128) = \#40BF80$

Př. 15: (a) v jedničkové, dvojkové, trojkové a čtyřkové soustavě

(b) v jedničkové až v devítkové

(c) v jedničkové

Př. 16: Každé takové číslo končí nulou. Například

$$(122)_3 = \underbrace{1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3}_{\text{tento součet je jistě dělitelný třemi}} +2$$

Je tedy jasné, že toto číslo třemi být dělitelné nemůže, jelikož nekončí nulou.

Nebo uvažujme

$$(AB0)_{16} = A \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 0 = \underbrace{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16}_{\text{tento součet je jistě dělitelný šestnácti}} +0$$

Je jasné, že toto číslo je dělitelné šestnácti.

Př. 17: (a) $(123)_5 = (38)_{10}$

(b) $(1122)_3 = (44)_{10}$

(c) $(AB3)_{12} = (1575)_{10}$

(d) $(616)_7 = (307)_{10}$

Př. 18: (a) $(123)_{10} = (11120)_3$

(b) $(123)_{10} = (443)_5$

(c) $(123)_{10} = (A3)_{12}$

(d) $(123)_{10} = (1323)_4$