V celém následujícím dokumentu platí, že C označuje libovolnou konstantu (číslo) a f, g jsou nějaké funkce. Pokud není řečeno jinak, budou navíc f, g funkce proměnné x a rovněž derivujeme podle x.

Derivace

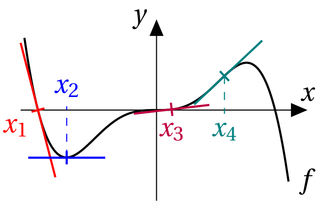
Derivaci funkce g označujeme:

- v matematice obvykle g' (druhá derivace g'' atd.); pokud je potřeba specifikovat, podle které proměnné se derivuje, zapíšeme např. g'_x
- ve fyzice obvykle $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ (druhá derivace $\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}$ atd.)
- pokud se ve fyzice derivuje podle času, obvykle místo $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ zapíšeme spíše $\dot{g}$ (druhá derivace podle času $\ddot{g}$ atd.)

V souladu s tímto značením je pak derivace v bodě x_0 definována limitou

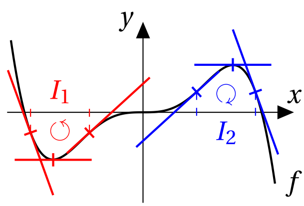
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivace má geometrický význam – její hodnota v daném místě určuje sklon grafu funkce v tomto místě a určuje tedy také, zda je funkce v daném místě rostoucí (kladná derivace), nebo klesající (záporná derivace):



$$f'(x_1) < 0$$
$$f'(x_2) = 0$$
$$f'(x_4) > f'(x_3) > 0$$

Druhá derivace pak říká, zda je první derivace rostoucí, nebo klesající – její hodnota v daném intervalu tedy určuje, zda je v něm funkce konvexní (kladná druhá derivace), nebo konkávní (záporná druhá derivace):



na intervalu I_1: $f''(x) > 0$

na intervalu I_2: $f''(x) < 0$

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Vzorce pro derivace

$$(Cf)' = Cf'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (g \neq 0)$$

$$f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

Derivace elementárních funkcí

Není-li v poznámce definováno jinak, a je libovolné reálné číslo.

funkce	derivace	poznámka
$f(x) = C$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x^a$	$f'(x) = ax^{a-1}$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	zvláštní případ předchozího
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$a > 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	zvláštní případ předchozího
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	zvláštní případ předchozího
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left.\right\}\ x \in (-1;1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	
$f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

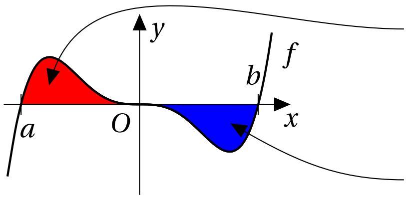
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

Integrály

Neurčitý integrál funkce f označujeme $I = \int f \,\mathrm{d}x$, přičemž platí, že $f = I'$ (takže integrál je opačná operace k derivování). Pro určitý integrál téže funkce f pak platí $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = I(b) - I(a)$.

Určitý integrál má též geometrický význam – jeho hodnota odpovídá ploše pod křivkou na daném intervalu:



plocha nad osou x je kladná:
$$\int_a^0 f \,\mathrm{d}x \;>\; 0$$

plocha pod osou x je záporná:
$$\int_0^b f \,\mathrm{d}x \;<\; 0$$

Určitý integrál lze rovněž využít i v jiných aplikacích:

délka křivky $\ell = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'^2} \,\mathrm{d}x$

objem rotačního tělesa $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2 \,\mathrm{d}x$

povrch pláště rotačního tělesa $S = 2\pi \displaystyle\int_a^b f \cdot \sqrt{1 + f'^2} \,\mathrm{d}x$

Vzorce pro integrály

$$\int C f \,\mathrm{d}x = C \int f \,\mathrm{d}x$$
$$\int (f \pm g) \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x \pm \int g \,\mathrm{d}x$$

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání,* s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Základní neurčité integrály

Není-li v poznámce definováno jinak, a je libovolné reálné číslo.

funkce	integrál	poznámka
$f(x) = 0$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = C$	
$f(x) = a$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = ax + C$	
$f(x) = x^a$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \neq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	
$f(x) = \sin x$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	
$f(x) = \cos x$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C$	
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$	
$f(x) = a^x$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1$
$f(x) = e^x$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = e^x + C$	zvláštní případ předchozího
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$	
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$	$x \in (-1;1)$

Integrace per partes

Tato metoda se často používá při integrování součinu funkcí (příp. i opakovaně).

$$\int (f g')\,\mathrm{d}x = fg - \int (f' g)\,\mathrm{d}x$$

Substituční metoda

Tato metoda se používá pro komplikovanější integrály, není však vždy jednoduché určit vhodnou substituci.

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int f\big(g(x)\big) g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, přičemž jsme použili substituci $u = g(x)$

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.