Rovnice vyšších řádů

autor: Pavel Sikora

Zadání

1. Vyřeš rovnici $x^4 - 7x^2 + 18 = 0$.
2. Vyřeš rovnici $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$. Rovnice má jen racionální kořeny.
3. Vyřeš rovnici $8x^6 + 95x^3 - 12 = 0$.
4. Vyřeš rovnici $x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$.
5. Vyřeš rovnici $x^6 + 5x^5 - 35x^4 + 35x^2 - 5x - 1 = 0$.
6. Vyřeš rovnici $2x^8 - 13x^7 + 30x^6 - 28x^5 + 6x^4 + 13x^3 - 30x^2 + 28x - 8 = 0$. Rovnice má alespoň šest racionálních kořenů.

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Nápověda

1. Jedná se o bikvadratickou rovnici.
2. Jelikož víme, že všechny kořeny rovnice jsou racionální, víme, že pro každý kořen $x_i = \frac{p}{q}$ platí, že $p \mid 2$ a $q \mid 3$, čímž je množina potenciálních řešení poměrně omezena. Jelikož se jedná o rovnici druhého stupně, stačí „uhodnout" jedno, abychom rovnici převedli na kvadratickou, kterou už můžeme vyřešit vzorcem.
3. Nejedná se sice o bikvadratickou rovnici, ale rovněž jde o rovnici, kterou můžeme šikovnou substitucí převést na rovnici kvadratickou.
4. Jedná se o reciprokou rovnici 1. druhu se sudým stupněm, chceme tedy zavést substituci $t = x + \frac{1}{x}$.
5. Jedná se o reciprokou rovnici 2. druhu, chceme tedy postupně využít poznatky pro reciproké rovnice.
6. Nejméně šest kořenů rovnice je racionálních, a tedy pro ně platí, že $x_i = \frac{p}{q}$, kde $p \mid 2$ a $q \mid 8$, čímž je množina potenciálních řešení poměrně omezena. Jelikož se jedná o rovnici osmého stupně, po „uhodnutí" šesti řešení se rovnice změní na kvadratickou, kterou už můžeme vyřešit vzorcem.

   Pozor, že některé kořeny mohou být vícenásobné. To, že dané číslo vychází jednou, nevylučuje, že může vycházet i podruhé, potřetí, . . .

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti", část „Matematická gramotnost" je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Řešení

1. V oboru reálných čísel nemá žádné řešení.
2. $K = \left\{-1; \frac{1}{3}; 2\right\}$
3. $K = \left\{-\sqrt[3]{12}; \frac{1}{2}\right\}$
4. $K = \left\{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$
5. $K = \left\{-1; 1; 2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}; \frac{-9-\sqrt{77}}{2}; \frac{-9+\sqrt{77}}{2}\right\}$
6. $K = \left\{-1; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$

   dvojka je trojnásobný kořen, tzn.

$$2x^8 - 13x^7 + 30x^6 - 28x^5 + 6x^4 + 13x^3 - 30x^2 + 28x - 8 =$$
$$= (x+1)(2x-1)(x-1)(x-2)^3(x^2+1)$$

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.