Rovnice vyšších řádů

autor: Pavel Sikora

Lineární a kvadratické rovnice

Lineární rovnici $ax + b = 0$ umíme vyřešit již ze základní školy, řešením je $x = -\frac{b}{a}$.

Pro řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ známe jednoduchý vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

kde diskriminant

$$D = b^2 - 4ac.$$

Víme přitom, že rovnice má v reálných číslech dvě řešení, pokud $D > 0$, a jedno dvojnásobné řešení, pokud $D = 0$. Pokud $D < 0$, kvadratická rovnice nemá žádné řešení v oboru reálných čísel.

Pro rovnice třetího a čtvrtého stupně existují komplikované vzorce, pro rovnice pátého nebo vyššího stupně obecné vzorce ani neexistují. Některé typy rovnic vyššího řádu ale přesto vyřešit dokážeme bez použití přibližných metod nebo počítače.

Bikvadratické rovnice

Bikvadratická rovnice je taková rovnice, ve které se neznámá vyskytuje jen ve čtvrté a druhé mocnině, tedy $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Tuto rovnici můžeme snadno převést na kvadratickou substitucí $t = x^2$, což nám dá $at^2 + bt + c = 0$.

Vyřešme například rovnici

$$2x^4 - 17x^2 - 9 = 0,$$

kterou substitucí $t = x^2$ převedeme na kvadratickou rovnici

$$2t^2 - 17t - 9 = 0.$$

Diskriminant této rovnice je

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 289 + 72 = 361;$$

řešení jsou

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 2} = \frac{17 \pm 19}{4} = \begin{cases} t_1 & = \frac{17+19}{4} = \frac{36}{4} = 9, \\ t_2 & = \frac{17-19}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

To jsou však zatím pouze hodnoty „náhradní“ proměnné t, musíme tedy provést zpětnou substituci:

$$t_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0,$$
$$t_2 = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\tfrac{1}{2}.$$

V prvním případě dostáváme řešení $x_1 = 3, x_2 = -3$, ve druhém případě řešení nedostáváme (druhá mocnina reálného čísla nikdy nebude záporná; případně bychom při výpočtu diskriminantu zjistili, že $D < 0$).

Dohromady tedy množina řešení původní rovnice $2x^4 - 17x^2 - 9 = 0$ je $K = \{-3; 3\}$.

Binomické rovnice

Binomická rovnice je rovnice, která má jen dva členy – vedoucí a absolutní, tedy rovnice tvaru $x^n - k = 0$. Řešení těchto rovnic se spoléhá na poznatky o komplexních číslech, a nyní se jim tedy věnovat nebudeme.

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Hornerovo schéma

Hornerovo schéma nám umožňuje efektivně a rychle dělit polynom dvojčlenem, a tak testovat, zda to které číslo je, nebo není řešením.

Jeho princip si ukážeme na konkrétním příkladu. Uvažme polynom

$$2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 13x + 6$$

a zkusme jej vydělit dvojčlenem $x + 1$. Nulový bod dvojčlenu $x + 1$ je -1 (tímto dělením tedy vlastně testujeme, zda $x_0 = -1$ je kořenem polynomu):

Zapíšeme koeficienty původního polynomu do tabulky:

x_0	2	-4	-3	11	-13	6
-1						

Koeficient v prvním sloupečku jen opíšeme. Počínaje druhým sloupečkem ale budeme vždy na druhý řádek zapisovat součin výsledné hodnoty z *předchozího sloupečku* s číslem x_0:

x_0	2	-4	-3	11	-13	6
-1		-2				
	2					

Do třetího řádku pak vždy zapisujeme součet obou hodnot z daného sloupečku:

x_0	2	-4	-3	11	-13	6
-1		-2				
	2	-6				

Takto pokračujeme po sloupečcích dál:

x_0	2	-4	-3	11	-13	6
-1		-2	6			
	2	-6	3			

x_0	2	-4	-3	11	-13	6
-1		-2	6	-3		
	2	-6	3	8		

x_0	2	-4	-3	11	-13	6
-1		-2	6	-3	-8	
	2	-6	3	8	-21	

x_0	2	-4	-3	11	-13	6
-1		-2	6	-3	-8	21
	2	-6	3	8	-21	27

Co nám výsledek říká? Můžeme z něj přečíst, že

$$(2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 13x + 6) : (x + 1) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 8x - 21 \quad \text{(zb. 27)},$$

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

jihomoravský kraj

což lze také zapsat jako

$$(2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 13x + 6) : (x + 1) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 8x - 21 + \frac{27}{x+1}.$$

Jelikož jsme ale polynomy nevydělili beze zbytku, dozvěděli jsme se též informaci, že $x_0 = -1$ není kořenem polynomu, resp. řešením rovnice $2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 13x + 6 = 0$.

Zkusme otestovat jiné číslo, např. $x_0 = 2$:

$$\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 2 & -4 & -3 & 11 & -13 & 6 \\ \hline 2 & & & & & & \\ \hline\hline & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 2 & -4 & -3 & 11 & -13 & 6 \\ \hline 2 & & & & & & \\ \hline\hline & 2 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 2 & -4 & -3 & 11 & -13 & 6 \\ \hline 2 & & 4 & & & & \\ \hline\hline & 2 & 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 2 & -4 & -3 & 11 & -13 & 6 \\ \hline 2 & & 4 & 0 & & & \\ \hline\hline & 2 & 0 & -3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 2 & -4 & -3 & 11 & -13 & 6 \\ \hline 2 & & 4 & 0 & -6 & & \\ \hline\hline & 2 & 0 & -3 & 5 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 2 & -4 & -3 & 11 & -13 & 6 \\ \hline 2 & & 4 & 0 & -6 & 10 & \\ \hline\hline & 2 & 0 & -3 & 5 & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x_0 & 2 & -4 & -3 & 11 & -13 & 6 \\ \hline 2 & & 4 & 0 & -6 & 10 & -6 \\ \hline\hline & 2 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

Vidíme, že zbytek je tentokrát nula, takže číslo $x_0 = 2$ je kořenem našeho polynomu. Zároveň jsme zjistili, že

$$(2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 13x + 6) : (x - 2) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 3,$$

takže dále už můžeme hledat kořeny tohoto polynomu s nižším stupněm.

Reciproké rovnice

Reciproké rovnice jsou vlastně „symetrické“, nezmění je prohození prvního a posledního, druhého a před-posledního, … koeficientu. Symbolicky, rovnice

$$a_n x^2 + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

je reciproká, pokud

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

- pro každý index k od 0 do n platí, že $a_k = a_{n-k}$ (tyto rovnice nazýváme *reciproké rovnice 1. druhu*); nebo
- pro každý index k od 0 do n platí, že $a_k = -a_{n-k}$ (tyto rovnice nazýváme *reciproké rovnice 2. druhu*).

U reciprokých rovnic 2. druhu je snadné nahlédnout, že musí mít vždy kořen 1, tzn. v jejich rozkladu se musí nacházet dvojčlen $x - 1$. Po vydělení tímto dvojčlenem (např. s využitím Hornerova schématu) dostaneme vždy reciprokou rovnici 1. druhu.

Má-li reciproká rovnice 1. druhu lichý stupeň (a tím pádem sudý počet členů), opět lze snadno vidět, že musí mít kořen -1, tzn. v jejím rozkladu se musí nacházet dvojčlen $x + 1$. Po vydělení tímto dvojčlenem (např. s využitím Hornerova schématu) dostaneme vždy opět reciprokou rovnici 1. druhu, tentokrát však již sudého stupně.

Stačí nám tedy umět řešit reciproké rovnice 1. druhu se sudým stupněm (tj. lichým počtem členů). V nich se přitom postupuje tak, že je vydělíme $x^{\frac{n}{2}}$, kde n je stupeň rovnice a zavede se substituce $t = x + \frac{1}{x}$. Tímto postupem efektivně vydělíme stupeň rovnice dvěma.

Vše si nyní postupně ukážeme na příkladu:

$$x^6 - 12x^5 + 28x^4 - 28x^2 + 12x - 1 = 0,$$

kde jsme barevně vyznačili „odpovídající si“ členy. Vidíme, že „odpovídající si“ členy mají opačná znaménka. Jde tedy o reciprokou rovnici 2. druhu a kořenem je nutně $x_1 = 1$.

Aplikujeme Hornerovo schéma:

x_1	1	-12	28	0	-28	12	-1
1		1	-11	17	17	-11	1
	1	-11	17	17	-11	1	

Dostáváme rovnici

$$x^5 - 11x^4 + 17x^3 + 17x^2 - 11x + 1 = 0,$$

v níž vidíme, že „odpovídající si“ členy mají stejná znaménka. Jde tedy o reciprokou rovnici 1. druhu, přičemž má sudý počet členů (resp. lichý stupeň), a kořenem je tedy nutně $x_2 = -1$.

Aplikujeme opět Hornerovo schéma:

x_1	1	-12	28	0	-28	12	-1
1		1	-11	17	17	-11	1
x_2	1	-11	17	17	-11	1	
-1		-1	12	-29	12	-1	
	1	-12	29	-12	1		

Dostáváme rovnici

$$x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 12x + 1 = 0,$$

což je opět reciproká rovnice 1. druhu, tentokrát ovšem s lichým počtem členů (resp. sudým stupněm).

Stupeň rovnice je 4, vydělíme ji tedy $x^{\frac{4}{2}} = x^2$:

$$x^2 - 12x + 29 - \frac{12}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Nyní sdružíme „odpovídající si“ členy a vytkneme:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 29 = 0.$$

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Máme nyní v úmyslu zavést substituci $t = x + \frac{1}{x}$, ale „červený“ člen je poněkud jiný. Zřejmě to ale bude mít něco společného s druhou mocninou t, tak tedy zkusíme obě strany umocnit:

$$\begin{aligned} t &= x + \frac{1}{x} \qquad /^2 \\ t^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ t^2 &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \qquad / - 2 \\ t^2 - 2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Nyní můžeme substituci provést a rovnici vyřešit:

$$\begin{aligned} \left(t^2 - 2\right) - 12t + 29 &= 0 \\ t^2 - 12t + 27 &= 0 \\ D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 144 - 108 &= 36 \\ t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 6}{2} &= \begin{cases} t_1 &= \frac{12+6}{2} = 9 \\ t_2 &= \frac{12-6}{2} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Provedeme zpětnou substituci a vyřešíme výsledné rovnice:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 9 \qquad / \cdot x \\ x^2 + 1 &= 9x \qquad / - 9x \\ x^2 - 9x + 1 &= 0 \\ D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 81 - 4 &= 77 \\ x_{3,4} = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2} &= \begin{cases} x_3 &= \frac{9+\sqrt{77}}{2} \\ x_4 &= \frac{9-\sqrt{77}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 3 \qquad / \cdot x \\ x^2 + 1 &= 3x \qquad / - 3x \\ x^2 - 3x + 1 &= 0 \\ D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 &= 5 \\ x_{5,6} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} &= \begin{cases} x_5 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x_6 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že původní rovnice má šest řešení, a to

$$K = \left\{ 1; -1; \frac{9 + \sqrt{77}}{2}; \frac{9 - \sqrt{77}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Uhodnutí racionálních kořenů

Poslední možností, jak můžeme rovnice vyšších řádů řešit, je kořen prostě uhodnout. Pokud bychom ale hádali naslepo ze všech reálných čísel, museli bychom mít velké štěstí. Naštěstí pokud má rovnice celočíselné koeficienty (příp. racionální, protože takovou rovnici vynásobením společným jmenovatelem převedeme na rovnici s celočíselnými koeficienty), platí pro její řešení z oboru racionálních čísel určitá omezení.

Je dána rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

kde všechny koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jsou celá čísla. Pokud racionální číslo $x_1 = \frac{p}{q}$ je řešením, pak nutně absolutní koeficient $a_0 \mid p$, zatímco vedoucí koeficient $a_n \mid q$.

Například rovnice

$$3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$$

může mít hypoteticky řešení -2 (dosazením bychom zjistili, že -2 řešením skutečně je) nebo $\frac{2}{3}$ (u něj ale dosazením zjistíme, že řešením není), ale například $\frac{3}{5}$ zcela určitě řešením není (zde hned ze dvou důvodů: zaprvé $3 \nmid 2$, zadruhé ani $5 \nmid 3$).

Pokud navíc použijeme pro ověření, zda je číslo kořenem, Hornerovo schéma, stupeň rovnice tím automaticky snížíme a další hádání pro nás bude jednodušší (případně, pokud stupeň snížíme na dva, řešíme prostě jako kvadratickou rovnici).

Použitý zdroj:

- *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Reciproká rovnice* [online]. 2020 [citováno 16. 11. 2020]. Dostupné z `https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Reciprok%C3%A1_rovnice&oldid=18662042`.

Klíčová aktivita „Podpora gramotnosti“, část „Matematická gramotnost“ je realizována v rámci projektu *Implementace KAP JMK II*, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci *Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání*, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.